NAZIONALE
12
3 0
8
OTECA
VITT. EMANUELE

Ex Bibliotheca
majori Coll. Rom.
Societ. Jesu

4. 31. 54
D
54.
e
31

1K-23. E.10

DES COMMUNES MESURES ET RACINES COMMUNES

DES QUANTITEZ LITERALES, DU PARTAGE d'autant de quarrez donnez que l'on voudra en d'autres qui ſoient entre des limites preſcrites, & de la reſolution des puiſſances ou équations compoſées, depuis le premier degré à l'infini. Ouvrage neceſſaire pour perfectionner l'Algebre en general, & en particulier celle de Diophante.

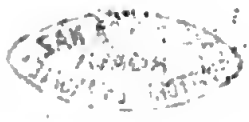
Par le Sieur TANEGUY LE FEVRE.

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE
Bib. Sec. Coll. Rom. Soc. J.

A PARIS, QUAY DES AUGUSTINS,
Chez CLAUDE JOMBERT, prés la grande porte des Auguſtins, vis-à-vis la deſcente du Pont-Neuf, à l'Image Nôtre-Dame.

M. DCCXIV.

AVEC PRIVILEGE DU ROY.



AU ROY.

SIRE,

BIBLIOTECA NAZ
ROMA
VITTORIO EMANUELE

VOSTRE MAJESTE', *m'a commandé de travailler pour l'utilité du Public. J'oſe eſperer,* SIRE, *que mon Ouvrage pourra ſervir à perfectionnner les Mathematiques. Je ſupplie tres-humblement* VOSTRE MAJESTE' *de le proteger, & de me continuer les bontez dont Elle a bien voulu me favoriſer. Jamais zele ne ſurpaſ-*

ſera celuy que j'ay toûjours eu & aurai toute ma vie pour ſon ſervice. J'ay pour VOSTRE MAJESTE' *tous les ſentimens que la naiſſance & le devoir peuvent donner. Je ſeray à jamais avec un tres-profond reſpect,*

SIRE,

De VOSTRE MAJESTE'

Le tres-humble, tres-obéïſſant & tres fidel Serviteur & Sujet
TANEGUY LE FEVRE.

AVIS AU LECTEUR.

LEs Auteurs qui ont traité de la Commune Meſure des quantitez litterales, du partage des quarrez & de la reſolution des puiſſances ſuivant ce que demande l'Algebre, ont donné au public des Methodes obſcures, & la pluſpart du temps impratiquables. Je croy que cet Ouvrage pourra être utile, & que mes nouvelles découvertes donneront occaſion aux habiles Mathematiciens de perfectionner une étude ſi neceſſaire & à la Nation & à tout l'Univers.

Les marques dont je me ſers & qui pourroient avoir beſoin d'explication, ſont

= égal, ∞ égal, + plus, — moins,
[plus grand,] plus petit.

Voicy deux Approbations du plus fameux Mathematicien d'Angleterre; premierement en ſa langue, comme il me les a données, & enſuite en François comme je les ai traduites.

Elles ne parlent que de la Commune Meſure & du partage des Quarrez. Pour ce qui eſt de la reſolution des Puiſſances, j'ay compoſé ce petit Traité aux Indes Occidentales, & le recommande au Lecteur, à qui je donneray la continuation de l'Ouvrage, s'il veut bien recevoir favorablement le premier Volume.

Au reſte il y a quelques fautes d'impreſſion dans le corps de l'Ouvrage ſi faciles à découvrir qu'elles n'embarraſſeront aucun Algebriſte.

ANGLOIS, touchant le Traité de la Commune Meſure.

J very vvell approve of this method of findig the diviſors of quantities, and take the principall things therin to be of the invention of Mr Le Febvre, and very vvell deſerving to be made publick for the benefitt of the Mathematicall ſtudents.

London, July 21°. 1710.

EDM. HALLEY.

EN FRANÇOIS.

J'approuve parfaitement cette Methode qui enſeigne à trouver les Diviſeurs des quantitez. Je croy que les principales choſes que l'Ouvrage contient ont été découvertes par Monſieur Le Févre, & meritent tout-à-fait d'être publiées pour aider ceux qui étudient les Mathematiques.

A Londres, le 21. de Juillet 1710.

EDM. HALLEY.

ANGLOIS touchant le Traité du partage des Quarrez.

J have peruſed this curious treatiſe, ant take it as vvell deſerve the vievv of the publick, as any thing that has yet appear'd on the like ſubjects.

London. July 17° 1710.

EDM. HALLEY.

EN FRANÇOIS.

J'ay examiné cet ingenieux Traité, & croy qu'il merite d'être publié autant que jamais aucun autre compoſé touchant le même ſujet l'ait merité.

A Londres, le 17e de Juillet 1710.

EDM HALLEY.

PRIVILEGE DU ROY.

LOUIS PAR LA GRACE DE DIEU ROY DE FRANCE ET DE NAVARRE : A nos amez & feaux Conseillers les gens tenant nos Cours de Parlement, Maîtres des Requestes ordinaires de nôtre Hôtel, Grand Conseil, Prevôt de Paris, Baillifs, Senéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Officiers & Justiciers qu'il appartiendra, SALUT. Nôtre amé & feal le Sieur TANEGUY LE FE'VRE Nous a fait remontrer qu'il desiroit mettre au jour un Ouvrage intitulé *des Communes Mesures, & Racines communes des Quantitez literales du partage d'autant de Quarrez donnez que l'on voudra en d'autres qui soient entre des limites prescrites, & de la resolution des puissances ou équations composées, depuis le premier degré à l'infini, Ouvrage necessaires pour perfectionner l'Algebre en general, & en particulier celle de Diophante*, s'il nous plaisoit de lui accorder nos Lettres de Privilege sur ce necessaires. A ces causes voulant favorablement traiter l'Exposant, Nous lui avons permis & accordé & par ces Presentes lui permettons & accordons de faire imprimer ledit Ouvrage par tel Libraire ou Imprimeur qu'il voudra choisir, en telle forme, marge, caractere, nombre & volumes & autant de fois que bon lui semblera ; & de vendre ou faire debiter par tout notre Royaume pendant le tems de dix années consecutives, à compter du jour de la datte des Presentes : Faisons défenses à toutes personnes de quelque qualité & condition qu'elles puissent être, & à tous Imprimeurs & Libraires d'imprimer ou faire imprimer ledit Ouvrage pendant ledit tems, sous quelque prétexte que ce puisse être sans la permission expresse & par écrit de l'Exposant ou de ses ayans causes, à peine de confiscation des Exemplaires contrefaits, de six mille livres d'amende contre les contrevenans, & de tous dépens, dommages interêts; à la charge que ces Presentes seront enregistrées tout au long sur les Registres de la Communauté des Imprimeurs & Libraires des Paris & ce dans trois mois de la datte d'icelles ; que l'impression en sera faite dans nôtre Royaume & non ailleurs, en bon papier & beaux caracteres conformement aux Reglemens de la Librairie, & qu'avant que de les exposer en vente il en sera mis deux Exemplaires dans notre Biblioteque publique, un dans celle de nôtre Château du Louvre & un autre dans celle de nôtre amé & feal Chancelier de France le Sieur Phelypeaux Comte de Pont-

chattrain, Commandeur de nos Ordres, le tout à peine de nullité des Presentes, du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire joüir ledit Exposant ou ses ayans causes pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la copie desdites Presentes qui sera imprimée au commencement ou à la fin dudit Ouvrage soit tenuë pour dûëment signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amez & feaux Conseillers & Secretaires foi soit ajoûtée comme à l'Original : Commandons au premier nôtre Huissier ou Seigneur de faire pour l'execution d'icelles tous Actes requis & necessaires, sans demander autre permission, & nonobstant Clameur de Haro, Charte Normande & autres Lettres à ce contraire : CAR tel est nôtre plaisir. Donné à Versailles le dixiéme jour de Février, l'an de Grace mil sept cens quatorze, & de nôtre Regne le soixante onziéme. Par le Roi en son Conseil,

Signé, CHAPPUSEAU.

Il est ordonné par l'Edit de Sa Majesté de 1686. & Arrests de son Conseil rendus en consequence, que les Livres dont l'impression se permet par chacun des Privileges ne seront vendus que par un Libraire ou Imprimeur,

Registré sur le Registre No. 3. de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, page 744. Article 828. conformement aux Reglemens, & notamment à l'Arrest du 13. Aoust 1703. A Paris ce quatriéme Mars mil sept cens quatorze.

Signé, ROBUSTEL, Syndic.

Achevé d'imprimer le 5. Octobre 1714.

Ledit Sieur Taneguy Le Févre a cedé & cede le present Privilege à Claude Jombert à l'égard du premier Volume, suivant les conventions faites entr'eux.

METHODE

POUR TROUVER LA PLUS GRANDE Commune Meſure de deux quantitez litterales propoſées.

1. L'ON conſidere les deux quantitez propoſées, comme ſi elles étoient chacune égales à théta.

2. On les écrit ſelon une origine ou lettre principale, qui s'éléve à un degré lequel ne ſoit pas moins haut que celuy d'aucune autre lettre qui leur ſoit commune.

3. L'on prend pour diviſeur celle des deux quantitez propoſées, où le plus haut degré de la lettre principale n'excede pas le plus haut degré de la même lettre dans l'autre quantité que l'on prend pour dividende.

4 La diviſion étant faite, s'il ne reſte rien, la quantité, que l'on a priſe pour diviſeur, eſt la plus grande commune meſure cherchée. Cecy fait le premier cas.

5. Le ſecond cas eſt, quand il demeure un reſte où la lettre principale ſe rencontre, quoy que moins élevée que dans le diviſeur; de ſorte que

diviſant celuy-cy par le ſuſdit reſte, & continuant de faire des diviſions alternatives, autant qu'il eſt poſſible, à la fin il ne reſte rien du tout. Lors que telle choſe arrive, le dernier diuiſeur eſt la plus grande commune meſure des deux quantitez propoſées.

6. Le troiſiéme & dernier cas eſt, lors qu'aprés quelque diviſion que ce ſoit, il reſte quelque choſe, ſans que la lettre principale paroiſſe dans ce qui reſte. Quand on tombe ſur ce troiſiéme cas, il faut d'abord conclure, que les deux propoſées n'ont aucune commune meſure plus grande que l'unité.

7 Juſques icy nous imitons ce qui ſe pratique dans l'Arithmetique vulgaire, pour découvrir la plus grande commune meſure de deux nombres donnez.

8 Cependant il faut remarquer, qu'avant que de faire une diviſion, il eſt à propos de découvrir premierement la plus grande quantité qui meſure chaque terme du diviſeur & du dividende, ce qui ſe pourra découvrir par les regles précedentes. Car ayant trouvé la plus grande commune meſure du premier terme de l'un & du premier terme de l'autre, rien n'empêchera de trouver par la même methode, celle de cette plus grande commune meſure & du ſecond terme du diviſeur, enſuite la plus grande commune meſure de celle-cy & du ſecond terme du dividende, & de continuer juſqu'à ce qu'on ait parcouru de la même façon tous les termes du diviſeur & du dividende. Ou, ſi on l'aime mieux, il ſera également facile de parcourir premierement tous les termes du diviſeur, & enſuite tous ceux du dividende, dés qu'on aura découvert la plus grande quantité qui meſure le premier terme de celuy-là & le premier de celuy-cy; puiſque de la-

quelle de ces deux manieres que l'on s'y prenne, le dernier trouvé ſera la plus grande quantité qui meſure chaque terme du diviſeur & du dividende.

9. Quand le dernier trouvé eſt l'unité, il ne ſert de rien; mais quand il contient quelque autre quantité, ſoit litterale ou numerique, il faut l'employer pour diviſer le diviſeur & le dividende dont il s'agit. Les deux quotients ſeront le diviſeur & le dividende préparez Ce ſera ſur eux que tombera le calcul, en obſervant les quatriéme, cinquiéme & ſixiéme numero.

10. Il ſurvient ſouvent une difficulté qui ſeroit inſurmontable, ſi l'on ne ſçavoit pas y remedier. C'eſt quand il ſe trouve dans le quotient une fraction dont le dénominateur ne meſure pas chaque terme du diviſeur.

11. La Methode que nous avons inventée pour lever cette difficulté, dont la crainte a obligé les Analyſtes à chercher des routes incertaines & obſcures, où l'on ſe perd comme dans un labyrinthe, conſiſte à transformer le diviſeur & le dividende, non préparez, quand ils n'admettent pas de préparation, mais préparez, quand ils en admettent une. La transformation ſe fait en multipliant le premier terme du diviſeur & du dividende par l'unité, le ſecond, par le ſuſdit dénominateur, le troiſiéme, par le quarré du même dénominateur, le quatriéme, par le cube, & ainſi de ſuite; obſervant de mettre en même temps une lettre qui n'ait point encore été employée, au lieu de celle qui ſert d'origine dans le diviſeur & le dividende dont on fait la transformation.

12 Par ce moyen l'origine des équations transformées égalera le produit de l'origine que l'on avoit en dernier lieu, multipliée par le dénominateur qui

cauſoit tout l'embarras. L'on operera ſur les deux équations transformées, au lieu de le faire ſur celles d'où venoit la fraction trop dure dans la pratique ; & la maniere de tirer des conſequences legitimes d'un calcul fondé ſur ces ſortes de transformations & ſur les diviſions marquées au neuviéme numero s'apprendra facilement, ſi l'on veut bien prendre la peine d'examiner, la plume à la main, les exemples que nous en avons donnez.

13. Il eſt certain que nôtre Méthode admet tres-ſouvent des abbrégemens, tel que ſeroit, par exemple, à l'égard du diviſeur que l'on veut transformer, de diviſer le premier terme par ſon coëfficient, & le ſecond par l'unité, de multiplier le troiſiéme par le ſuſdit coëfficient, le quatriéme par le quarré du même coëfficient, le cinquiéme par le cube, & de continuer de la même façon juſques à la fin, ſans alterer ce qui a été dit au numero onziéme, touchant la multiplication des termes du dividende que l'on veut transformer & le changement de l'origine que celuy-cy & le diviſeur ont avant la transformation.

14. Mais comme nôtre deſſein eſt d'éviter une multiplicité de préceptes capable de charger la mémoire ; nous ne nous ſervirons point de cette ſeconde maniere de transformer & laiſſerons aux Algébriſtes le ſoin de chercher les abbrégemens de nôtre methode, que nous propoſons telle que nous l'inventâmes il y a quelques années.

PREMIER EXEMPLE.

1°. Trouver la plus grande commune meſure des quantitez *A* & *B*.

2°. On prend *d* pour origine ou lettre princi-

pale, comme étant la lettre commune aux deux proposées qui s'éleve au plus haut degré dans leur somme.

3°. On prend A pour diviſeur & B pour dividende ; parce que l'origine eſt plus élevée dans B que dans A.

Diviſeur A.
$-aad + aac$
Dividende B.
$-dd + cd$

4°. La plus grande commune meſure du premier terme de A & du premier de B eſt d. Mais d n'a que l'unité pour plus grande commune meſure avec l'autre terme de A & l'autre terme de B.

5°. C'eſt pourquoy je diviſe B par A. D'abord diviſant $-dd$ par $-aad$, le quotient eſt $\frac{dd}{aad}$. & comme on a trouvé que d meſure dd & aad; je diviſe dd & aad par d, & les quotiens ſont d & aa. Ainſi $\frac{dd}{aad} = \frac{d}{aa}$, & de plus je voy que le dénominateur aa meſure l'autre terme aac de la quantité A qui ſert de diviſeur.

5°. Diviſeur A.
$-aad + aac$

Quotient.
Dividende B $-dd + cd$ $\left\{ \frac{d}{aa} \right.$

Otez $-dd + cd$

Reſte 0

7°. Soit que par aa dénominateur du quotient on diviſe A, ou que par D numerateur du quotient on diviſe B, on trouvera $-d+c$; de ſorte que la cherchée eſt $c...d$. En effet ſi par $c-d$ on diviſe A, il viendra aa pour quotient, & ſi par $c-d$ on diviſe B, le quotient ſera d.

8°. Ces deux manieres de conclure (lors qu'il ne reſte que 0) par le moyen du dénominateur, ou par celuy du numerateur du quotient, ſont également ſeures dans cet exemple, dans les autres qui le ſuivent, & dans tous ceux qu'il eſt poſſible de propoſer, pourvû que l'on ait égard aux préparations & transformations, quand il y en aura Icy nous n'avons pas eu beſoin d'en faire. Ce ſera ſeulement aprés le quatriéme exemple que nous aurons lieu d'employer ces deux ſecours.

SECOND EXEMPLE.

1°. Trouver la plus grande commune meſure des quantitez A & B.

2°. On peut prendre indifféremment m ou p pour origine, parce que ce ſont, entre les lettres communes aux deux propoſées, celles qui s'élévent au plus haut degré dans la ſomme deſdites deux propoſées, & que m & p s'y trouvent auſſi élevées l'une que l'autre.

3°. Que premierement m ſoit l'origine.

4°. De cette maniere A ſera le dividende & B le diviſeur, parce que l'origine m eſt plus éleyée dans B que dans A.

5°. Diviſeur A.

$$4p^{3}\,\text{x}\,m^{4} + oopp\text{z}^{4}$$

Dividende B

$$4a^{6}\,ccpm^{3} + a^{6}\,ccoomm$$

Quotient.

$$\left\{ \frac{a^{6}\,ccmm}{ppz^{4}} \right.$$

Otez $4a^{6}\,ccpm^{3} + a^{6}\,ccoomm$

Reſte θ

6°. Par ppz^{4} dénominateur du quotient diviſant A, il vient $4mp + oo$ qui eſt la cherchée, meſurant A par ppz^{4} & B par $a^{6}\,ccmm$.

7°. Que ſecondement p ſoit l'origine.

8°. De cette maniere B ſera le diviſeur & A le dividende ; parce que l'origine p eſt plus élevée dans A que dans B.

9. Diviſeur B

$$4a^{6}\,ccm^{3}p + a^{6}\,ccoomm$$

Dividende A

$$4z^{4}\,mp^{3} + oo\text{z}^{4}\,pp$$

Quotient.

$$\left\{ \frac{ppz^{4}}{a^{6}\,ccmm} \right.$$

Otez $4z^{4}\,mp^{3} + oo\text{z}^{4}\,pp$

Reſte θ

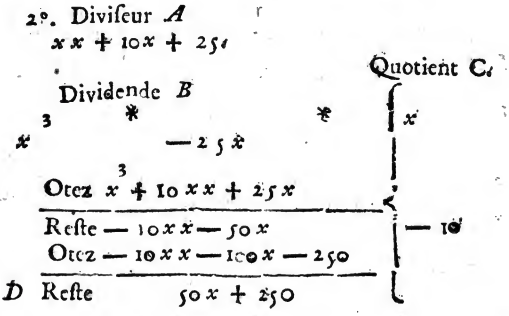
10°. Par $a^{6}\,ccmm$ diviſant B, on trouve 4

$mp + oo$ qui eſt la cherchée, comme auparavant.

TROISIE'ME EXEMPLE.

1°. Trouver la plus grande commune meſure de *A* & de *B*.

2°. On ne ſauroit prendre pour origne que la quantité x, puiſque c'eſt la ſeule lettre commune qui ſe trouve dans les deux propoſées. De plus *A* doit être le diviſeur & *B* le dividende, parce que l'origine x eſt plus élevée dans *B* que dans *A*.



3°. L'origine eſt plus haute dans *A* que dans *D*. C'eſt pourquoy on ne doit pas pourſuivre la diviſion, mais prendre *D* pour diviſeur & *A* pour dividende.

4°. Diviſeur

4°. Diviſeur D
$50x + 250$

Dividende A.	Quotient E
$xx + 10x + 25$	$\frac{x}{50}$
Oteż $xx + 5x$	
Reſte $5x + 25$	$+ \frac{1}{10}$
Oteż $5x + 25$	
Reſte 0	

5°. Les deux membres du quotient E étans ajoûtez en une ſomme, donnent $E = \frac{x+5}{50}$, & ſi par le dénominateur 50 on diviſe D, il viendra $x + 5$, qui meſure A par $x + 5$ & B par $xx - 5x$, ce qui montre que veritablement $x + 5$ eſt la cherchée.

6°. Si par le numerateur $x + 5$ on diviſe A, il viendra la même reſolution.

QUATRIE'ME EXEMPLE.

1°. Trouver la plus grande commune meſure de A & de B.

2°. Les lettres ż & a ſont communes aux deux propoſées, les ſeules qui s'y trouvent, & également élevées dans la ſomme deſdites propoſées ; ce qui montre qu'il eſt permis de prendre ż ou a pour origine.

3. Si l'on choiſit ż pour origine, on pourra indifferemment faire ſervir de diviſeur ou la premiere, ou la ſeconde des deux propoſées, parce que ż eſt

également élevée dans l'une & dans l'autre, ſavoir au quatriéme degré.

4°. Par une ſemblable raiſon, ſi on prend a pour origine, il ſera libre de choiſir pour diviſeur celle des deux propoſées que l'on voudra ; puiſque la lettre a monte auſſi haut dans l'une que dans l'autre, ſavoir juſques au quatriéme degré.

5°. Ainſi on peut calculer en quatre façons.

Calcul. Premiere façon.

6°. Que l'on choiſiſſe l'origine z & A pour diviſeur.

7°. Diviſeur A.

$$z^4 - 4az^3 + 11aaz^2 - 20az^3 + 12a^4$$

Dividende B. Quotient C.

$$z^4 - 3az^3 + 12aaz^2 - 16az^3 + 24a^4 \} + 1$$

Otez $z^4 - 4az^3 + 11aaz^2 - 20az^3 + 12a^4$

Reſte D. $+ az^3 + aazz + 4az^3 + 12a^4$

8°. Diviſeur *D*

$$az^3 + aazz + 4a^3z + 12a^4$$

Dividende *A*.

Quotient *E*.

$$z^4 - 4az^3 + 11aazz - 20a^3z + 12a^4 \quad \left| \frac{z}{a} \right.$$

Otez $z^4 + az^3 + 4aazz + 12a^3z$

Reſte $-5az^3 + 7aazz - 32a^3z + 12a^4$

Otez $-5az^3 - 5aazz - 20a^3z - 60a^4$ | -5

Reſte *F*. $+12aazz - 12a^3z + 72a^4$

9°. *F* devient diviſeur & *D* dividende. Mais comme *a* meſure chaque terme de *F* & de *D*; on fait premierement cette diviſion, qui fournit *G* & *H*.

10°. Diviſeur *G*

$$12azz - 12aaz + 72a^3$$

Dividende *H*.

$$z^3 + azz + 4aaz + 12a^3$$

Quotient *I*

Otez $z^3 - azz - + 6aaz$

Reſte $2azz - 2aaz + 12a^3$

Otez $2azz - 2aaz + 12a^3$

Reſte 0

11°. Les deux membres du quotient *I* font ensemble la somme $\frac{z+2a}{12a}$, & si par le dénominateur $12a$ on divise G, il viendra $zz-az+6aa$ qui est la cherchée, mesurant *A* par $zz-3az+2aa$ & *B* par $zz-2az+4aa$.

Calcul. Seconde façon.

12°. Diviseur *B*

$z^4 - 3az^3 + 12aazz - 16az^3 + 24a^4$

Dividende *A*

$z^4 - 4az^3 + 11aazz - 20az^3 + 12a^4$

Quotient *C*.

Otez $z^4 - 3az^3 + 12aazz - 16az^3 + 24a^4$ { $+1$

Reste *D*. $-az^3 - aazz - 4az^3 - 12a^4$

Diviseur *D*

$-az^3 - aazz - 4az^3 - 12a^4$

Dividende *B* Quotient *E*

$z^4 - 3az^3 + 12aazz - 16az^3 + 24a^4$ { $\frac{-z}{+a}$

Otez $z^3 + az^3 + 4aazz + 12az^3$ {

Reste $-4az^3 + 8aazz - 28az^3 + 24a^4$ { $+4$

Otez $-4az^3 - 4aazz - 16az^3 - 48a^4$ {

Reste *F*. $12aazz - 12az^3 + 72a^4$

13°. *F* devient diviſeur & *D* dividende. Mais comme *a* meſure chaque terme de *F* eſt de *D*; on fait premierement cette diviſion qui fournit *G* & *H*.

Diviſeur *G*

$$12azz - 12aaz + 72a^3$$

Dividende *H*

Quotient *I*.

$$-z^3 - 4aaz - 12a^3 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{-z}{+12a} \\ \\ \frac{-z}{+6} \end{array} \right.$$

Otez $-z^3 + azz - 6aaz$

Reſte $-2azz + 2aaz - 12a^3$

Otez $-2azz + 2aaz - 12a^3$

Reſte 0.

14°. Les deux membres du Quotient *I* font enſemble la ſomme $\frac{-z-2a}{+12a}$, & ſi par le dénominateur $12a$ on diviſe *G*, il viendra $zz - az + 6aa$ pour la cherchée, comme auparavant.

Calcul. Troiſiéme façon.

15°. Que l'on choiſiſſe pour origine *a* & *A* pour diviſeur.

16°. Diviſeur A

$$12a^4 - 20zza^3 + 11zzzaa^2 - 4zza^3 + z^4$$

Dividende B

Quotient C

Dividende B

$$24a^4 - 16zza^3 + 12zzzaa^2 - 3zza^3 + z^4 \Big\} + 2$$

Otez $24a^4 - 40zza^3 + 22zzzaa^2 - 8zza^3 + 2z^4$

Reſte D $24zza^3 - 10zzzaa^2 + 5zza^3 - z^4$

17°. D devient diviſeur & A dividende.

Diviſeur D

$$24zza^3 - 10zzzaa^2 + 5zza^3 - z^4$$

Premier terme du Quotient E

Dividende A

$$12a^4 - 20zza^3 + 11zzzaa^2 - 4zza^3 + z^4 \Big\} \frac{a}{2z}$$

18°. Le dénominateur $2z$ du quotient $\frac{a}{2z}$ meſure bien les deux premiers termiers de D. Mais lors que par $2z$ on diviſe le troiſiéme & enſuite le quatriéme terme de D, on trouve pour quotiens $\frac{5zzza}{2}$ & $\frac{-z^3}{2}$ qui ont 2 pour dénominateur commun. Comme 2 n'a point de racine convenable, ſoit $y = 2a$. La transformation donne F & G.

Diviſeur F

$$24zy^3 - 20zzyy + 20z^3y - 8z^4$$

Dividende G

$$12y^4 - 40zy^3 + 44zzyy - 32z^3y + 16z^4$$

19°. Chaque terme de ces deux qnantitez ſe meſure par 4, & il vient

Diviſeur *H*

$$6zy^3 - 5zzyy + 5z^3y - 2z^4$$

Dividende *I*

$$3y^4 - 10zy^3 + 11zzyy - 8z^3y + 4z^4$$

Premier terme du Quotient *K* $\frac{y}{2z}$

20°. Le dénominateur $2z$ du quotient $\frac{y}{2z}$ ne meſure que le premier & le dernier terme de *H*; & ſi par $2z$ on diviſe le deuxiéme & enſuite le troiſiéme, les quotients ſeront $\frac{-5zyy}{+2}$ & $\frac{5z \cdot y}{2}$. Le dénominateur 2 eſt commun. Soit donc $x = 2y$, la transformation de *H* & de *I* donnera.

Diviſeur *L*.

$$6zx^3 - 10zzxx + 20zx^3 - 16z^4$$

Dividende *M*. Quotient *N*.

$$3x^4 - 20zx^3 + 44zzxx - 64zx^3 + 64z^4 \quad \left\{ \frac{x}{2z} \right.$$

Otez $3x^4 - 5zx^3 + 10zzxx - 8zx^3$

Reſte $-15zx^3 + 34zzxx - 56zx^3 + 64z^4$ $\left\{ \frac{-5}{+2} \right.$

Otez $-15zx^3 + 25zzxx - 50zx^3 + 40z^4$

Reſte *O*. $9zzzxx - 6zx^3 + 24z^4$

21°. *O* devient diviſeur & *L* dividende, & ſi par *z* on diviſe chaque terme de *O* & de *L*, on aura *P* & *Q*.

Diviſeur *P*.

$$9zxx - 6zzx + 24z^3$$

Dividende *Q*. Quotient *R*.

$$6x^3 - 10zxx + 20zzx - 16z^3 \quad \left\{ \frac{2x}{3z} \right.$$

Otez $6x^3 - 4zxx + 16zzx$

Reſte $-6zxx + 4zzx - 16z^3$ $\left\{ \frac{-2}{+3} \right.$

Otez $-6zxx + 4zzx - 16z^3$

Reſte 0

22°. Les

22°. Les deux membres du quotient R étans ajoûtez enſemble, font la ſomme $\frac{2x-2z}{3z}$, & par $3z$ diviſant P, on trouve $3xx-2zx+8zz$ qui meſure P & Q, & par conſequent L & M.

23°. Comme $x=2y+8zz$; ſi dans $3xx-2zx+8zz$ on diviſe par 2 chaque valeur de x, il viendra $3yy-zy+2zz$ qui meſure H & I, de ſorte que quadruplant $3yy-zy+2zz$, à cauſe du 19e numero, la quantité $12yy-4zy+8zz$ meſure auſſi F & G.

24°. Enſuite, parce que $y=2a$ ſelon le 18e numero, ſi dans $12yy-4zy+8zz$ on diviſe par 2 chaque valeur de y, on trouvera $12aa-2za+2zz$, par quoy diviſant les propoſées A & B, on aura $\frac{2aa-3za+zz}{2}$ & $\frac{4aa-2za+zz}{2}$, le dénominateur commun 2 montrant que par 2 il faut diviſer le dernier diviſeur $12aa-2za+2zz$, pour avoir la plus grande commune meſure cherchée $6aa-za+\frac{1}{2}zz$

Remarque.

25°. L'ordre des diviſions & quotients eſt tel. $3xx-2zx+8zz$ meſure P par $3z$, & Q par $2x-2z$ & L par $2zx-2zz$ & M par $xx-6zx+8zz$. Comme $x=2y$, le diviſeur $3xx-2zx+8zz$ devient $3yy-zy+2zz$. Ceci meſure H par $2zy-\frac{1}{2}zz$ & I par $yy-\frac{3}{2}zy+2zz$. Quadruplant le diviſeur $3yy-zy+2zz$, il vient $12yy-4zy+8zz$ qui meſure F par $2zy-zz$ & G par $yy+2zz$, qui ſont, comme il falloit $\frac{3}{2}zy$, les mêmes quotients que les deux derniers. Comme

$y = 2a$, le diviſeur $12yy - 4zy + 8zz$ devient $12aa - 12za + 2zz$ & on acheve comme au 24e numero.

Calcul. Quatriéme façon.

26°. Diviſeur *B*.

$$24a^4 - 16za^3 + 12zzaa - 3za^3 + z^4$$

Dividende *A*. Premier terme du Quotient *C*.

$$\left.12a^4 - 20za^3 + 11zzaa - 4za^3 + z^4\right\} \frac{1}{2}$$

27°. Le dénominateur du quotient $\frac{1}{2}$ eſt 2 qui ne meſure ni le quatriéme ni le cinquiéme terme de *B*, mais donne pour quotients $\frac{-3za^3}{2}$ & $\frac{z^4}{2}$, & ce dénominateur commun 2 n'a aucune racine convenable. Soit $y = 2a$. La transformation donne
Diviſeur *D*.

$$24y^4 - 32zy^3 + 48zzyy - 24zy^3 + 16z^4$$

Dividende *E*.

$$12y^4 - 40zy^3 + 44zzyy - 32zy^3 + 16z^4$$

28o. Le nombre 4 meſure tous les termes de *D* & de *E*, ce qui donne
Diviſeur *F*.

$$6y^4 - 8zy^3 + 12zzyy^3 - 6zy^3 + 4z^4$$

Dividende *G*.

Quotient *H*.

$$3y^4 - 10zy^3 + 11zzyy^3 - 8zy^3 + 4z^4 \;\Big|\; 1$$

$$\text{Otez } 3y^4 - 4zy^3 + 6zzyy^3 - 3zy^3 + 2z^4$$

$$\text{Reſte } I. \; -6zy^3 + 5zzyy^3 - 5zy^3 + 2z^4$$

29°. Diviſeur *I*.

$$-6zy^3 + 5zzyy^3 - 5zy^3 + 2z^4$$

Dividende *F*.

Quotient *K*.

$$6y^4 - 8zy^3 + 12zzyy^3 - 6zy^3 + 4z^4 \;\Big|\; -y + z + \tfrac{1}{2}$$

$$\text{Otez } 6y^4 - 5zy^3 + 5zzyy^3 - 2zy^3$$

$$\text{Reſte } -3zy^3 + 7zzyy^3 - 4zy^3 + 4z^4$$

30°. Le dénominateur 2 de $\frac{1}{2}$, qui eſt le deuxiéme terme de *K*, n'a aucune meſure plus grande que l'unité qui luy ſoit commune avec le deuxiéme & le troiſiéme terme de *I*. Soit donc $x = 2y$. De cette façon *I* & *F* deviennent

Diviſeur *L*

$$-6zx^3 + 10zzxx^3 - 20zx^3 + 16z^4$$

Dividende *M*.

$$6x^4 - 16zx^3 + 48zzxx^3 - 48zx^3 + 64z^4$$

31°. Chaque terme de ces deux quantitez ſe meſure par 2, & il vient

Diviseur *N*.

$$-3zx^3 + 5zzxx^3 - 10zx^3 + 8z^4$$

Dividende *O*.

Quotient *P*.

$$3x^4 - 8zx^3 + 24zzxx^3 - 24zx^3 + 32z^4 \quad \Big| \; -x + z$$

Otez $3x^4 - 5zx^3 + 10zzxx^3 - 8zx^3$

Reste $-3zx^3 + 14zzxx^3 - 16zx^3 + 32z^4$ $\Big\}$ $+1$

Otez $-3zx^3 + 5zzxx^3 - 10zx^3 + 8z^4$

Reste *Q*. $9zzxx^3 - 6zx^3 + 24z^4$

320. *Q* devient diviseur & *N* dividende. Mais comme chacun de leurs termes se mesure par z, on fait cette division, & il vient

Diviseur *R*.

$$9zxx^3 - 6zzx + 24z^3$$

Dividende *S*.

Quotient *T*.

$$-3x^3 + 5zxx^3 - 10zzx^3 + 8z^3 \quad \Big| \; -x + 3x$$

Otez $-3x^3 + 2zxx^3 - 8zzzx$ $\Big\}$ $+\frac{x}{3}$

Reste $3zxx^3 - 2zzzx + 8z^3$

Otez $3zxx^3 - 2zzzx + 8z^3$

Reste 0

330. Les deux termes du quotient T étans ajoûtez enſemble font la ſomme $\frac{-x+z}{3z}$, & par $3z$ diviſant R, ſe quotient $3xx-2zx+8zz$ meſure R & S & par conſequent N & O, & le double $6xx-4zx+16zz$ meſure L & M. Dans $6xx-4zx+16zz$ $(=\vartheta)$ diviſant chaque valeur de x par 2, à cauſe de $x=2y$, il vient $6yy-2zy+4zz$ pour diviſeur convenable de I & de F, & par conſequent de F & de G. Enſuite quadruplant $6yy-2zy+4zz$, il vient $24yy+-8zy+16zz$ pour diviſeur convenable de D & de E. Enfin dans ce dernier diviſeur $(=\vartheta)$ diviſant chaque valeur de y par 2, à cauſe de $y=2a$, on trouve $24aa-4za+4zz$ pour diviſeur convenable des propoſées B & A leſquelles étans diviſées par $24aa-4za+4zz$, les quotients ſont $\frac{4aa-2za+zz}{4}$ & $\frac{2aa-3za+2zz}{4}$, dont le dénominateur commun 4 montre qu'il faut diviſer par 4 la quantité $24aa-4za+4zz$, pour avoir la quantité cherchée $6aa-za+zz$, comme auparavant.

Remarque.

340. $3xx-2zx+8zz$ meſure R par $3z$ & S par $-x+z$, N par $-zx+zz$ & O par $xx-2zx+4zz$. Ainſi doublant $3xx-2zx+8zz$, la quantité $6xx-4zx+16zz$ doit meſurer, comme elle le fait effectivement, L & M par les mêmes quotients; ſçavoir L par $-zx+zz$

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

& M par $xx - 2zx + 4zz$. Par $6yy - 2zy + 4zz$ diviſant I & F, les quotients ſont $\frac{-2zy+zz}{2}$ & $yy - zy + zz$. Ces deux quotients, étans réduits à une même dénomination, ſont $\frac{-2zy+zz}{2}$ & $\frac{2yy-2zy+2zz}{2}$ & le dénominateur commun 2 montre que ſi les propoſées étoient I & F, il faudroit par 2 diviſer $6yy - 2zy + 4zz$ & que le quotient $3yy - zy + 2zz$ ſeroit leur plus grande commune meſure. Par $6yy - 2zy + 4zz$ diviſant F & G, les quotients ſont $yy - zy + 6zz$ & $\frac{yy-3zy+2zz}{2}$, le dénominateur 2 montrant que la moitié de la quantité $6yy - 2zy + 4zz$, ſavoir $3yy - zy + 2zz$ meſure F & G par le double des deux quotients précedens, ſavoir par $2yy - 2zy + 12zz$ & $yy - 3zy + 2zz$. Si on quadruple $6yy - 2zy + 4zz$ on aura $24yy - 8zy + 16zz$ qui diviſe D & E par $yy - zy + zz$ & $\frac{yy-3zy+2zz}{2}$, de ſorte qu'à cauſe du dénominateur 2, prenant la moitié $24yy - 8zy + 16zz$, on aura $12yy - 4zy + 8zz$ qui diviſe D & E par $2yy - 2zy + 2zz$ & $yy - 3zy + 2zz$, la quantité $12yy - 4zy + 8zz$ étant la plus grande commune meſure de D & de E, & donnant les mêmes quotients que ceux qui naiſſent de la diviſion de F & G par $3yy - zy + 2zz$, comme il le faut; puiſque diviſer le quadruple d'une quantité par le quadruple d'une autre, ou une quantité ſimple par une autre ſimple, cela produit les mêmes quotients. Comme $y = 2a$,

si dans la quantité $24yy - 8zy + 16zz$ on divise chaque valeur de y par 2, on aura $24aa - 4za + 4zz$, ce qui divisant les proposées donne $\frac{4aa - 2za + zz}{4}$ & $\frac{2aa - 3za + zz}{4}$.

Par conséquent le quart de la quantité $24aa - 4za + 4zz$, savoir $6aa - za + zz$, mesure les proposées par $4aa - 2za + zz$ & $2aa - 3za + zz$.

CINQUIE'ME EXEMPLE.

1°. Trouver la plus grande comme mesure de A & de B.

2°. Les proposées n'ont de lettre que x, qu'il faut par conséquent nécessairement prendre pour origine, & comme x n'est pas si élevée dans A que dans B, on doit à cause de cela prendre A pour diviseur.

Diviseur A
$-4xx + 10x - 6$

Dividende B — Premier terme du Quotient C.

$x^3 - 4xx + 5x - 2$ — $\left\{ \frac{-x}{+4} \right.$

3°. Le dénominateur 4 de $\frac{-x}{+4}$ ne mesure ni $10x$ ni -6, mais donne pour quotients $\frac{5x}{2}$ & $\frac{-3}{2}$. Soit $y = 2x$. La transformation donnera

Diviſeur *D*.

$-4yy+20y-24$

Dividende *E*	Quotient *F*.
$y^3-8yy+20y-16$	$-y$
Otez $y^3-5yy+6y$	$+4$
Reſte $-3yy+14y-16$	$+\frac{3}{4}$
Otez $-3yy+15y-18$	
Reſte *G*. $-y+2$	

Diviſeur *G*.

$-y+2$

Dividende *D*.	Quotient *H*.
$-4yy+20y-24$	$4y$
Otez $-4yy+8y$	
Reſte $12y-24$	
Otez $12y-24$	-12
Reſte 0	

40. Le quotient *H* eſt $4y-12$, que l'on peut écrire $\frac{4y-12}{1}$, & ſi par 1 l'on diviſe *G*, il viendra $-y+2$ pour la plus grande commune meſure de *G* & de *D*, comme auſſi pour celle & de *D* & de *E*. Comme $y=2x-3$ ſi par 2 on diviſe la valeur de y dans l'équation $-y+2=0$; il viendra $-x+1$ qui eſt la cherchée & qui meſure *A* par $4x-6$ & *B* par $-xx+3x-2$.

SIXIE'ME

SIXIE'ME EXEMPLE.

1°. Trouver la plus grande commune mesure de A & de B.

2°. On prend z pour origine, comme étant la lettre commune aux deux proposées qui se trouve elevée au plus haut degré dans leur somme.

3°. On prend A pour diviseur, parce que l'origine z est moins élevée dans A que dans B.

Diviseur A

$$-2azz+2aaz-3aab$$
$$-bzz+4abz$$

Dividende B.

Premier terme du Quotient C.

$$z^3-2azz+aaz-aab \qquad \left\{\frac{-z}{2a+b}\right.$$
$$-bzz+2abz$$

4°. Le dénominateur $2a+b$ du quotient C n'a que l'unité pour plus grande commune mesure avec le deuxiéme terme de A. Soit donc $y=z\,)(\overline{2a+b}$. Les puissances de $2a+b$ sont, la premiere $2a+b$, la deuxiéme $4aa+4ab+bb$, la troisiéme $8a^3+12aab+6abb+b^3$. Ainsi, selon la regle, on multipliera le premier terme de A & le premier de B par l'unité, le deuxiéme terme de A & le deuxiéme de B par $2a+b$, le troisiéme de A & le troisiéme de B par $4aa+4ab+bb$, le quatriéme terme de B par $8a^3+12aab$

$+ 6aabb + b^3$, & on mettra y au lieu de z, ce qui donnera

Diviſeur *D*.

$$-2ayy + 4a^3y - 12ba^4$$
$$-byy + 10baay - 12bba^3$$
$$+ 4bbay - 3b^3aa$$

Dividende *E*.

Quotient *F*.

$$y^3 - 4aayy + 4a^4y - 8ba^5 \quad \Big\{ \quad -\frac{y}{2a+b}$$
$$-4bayy + 12ba^3y - 12bba^4$$
$$-bbyy + 9bbaay - 6b^3a^3$$
$$+ 2b^3ay - b^4aa$$

Otez $y^3 - 2aayy + 6ba^3y$
$-4bayy + 3bbaay$

Reſte $-2aayy + 4a^4y - 8ba^5$ $\Big\} \quad +\frac{2aa+bb}{2a+b}$
$$-bbyy + 6ba^3y - 12bba^4$$
$$+6bbaay - 6b^3a^3$$
$$+2b^3ay - b^4aa$$

Otez $= 2aayy + 4a^{4}y - 12b^{5}a$
$- bbyy + 8ba^{3}y - 6bba^{4}$
$+ 2bbaay - 6ba^{33}$
$+ 4ba^{3}y - 3baa^{4}$

Reſte *G*. $- 2ba^{3}y + 4ba^{5}$
$+ 4bbaay - 6bba^{4}$
$- 2ba^{3}y + 2baa^{4}$

Diviſeur *G*.
$-2ba^{3}y + 4ba^{5}$
$+ 4bbaay - 6bba^{4}$
$- 2ba^{3}y + 2baa^{4}$

Dividende *D*.
$-2ayy + 4a^{3}y - 12ba^{4}$
$- byy + 10baay - 12bba^{3}$
$+ bbay - 3baa^{3}$

Quotient *H*.
$2ay + by$
$2ba - 4bbaa$
$+ 2b^{3}a$

Otez $- 2ayy + 4a^{3}y$
$- byy + 4baay$
$+ bbay$

Reſte $6baay - 12ba^4 + 3bbay - 12bba^3 - 3b^3aa$ $\left\{\begin{array}{l} -6ba - 3bb \\ \hline 2baa - 4bba + 2b^3 \end{array}\right.$

Otez $6baay - 12ba^4 + 3bbay - 12bba^3 - 3b^3aa$

Reſte 0

5°. Les deux membres du quotient H ſont la ſomme $\frac{2ay + by - 6baa - 3bba}{2ba^3 - 4bbaa + 2b^3a}$ & ſi par le dénominateur $2ba^3 - 4bbaa + 2b^3a$ on diviſe G, on trouvera $-y + 2aa + ba$ pour la plus grande commune meſure de G & de D, deſquels la diviſion par $-y + 2aa + ba$ fournit les quotients $2ba^3 - 4bbaa - 2b^3a +$ & $-6baa - 3bba + 2ya + by$ & la même quantité $-y + 2aa + ba$ meſure D & E par $-6baa - 3bba + 2ya + by$ & $-4ba^3 - 4bbaa + 2yaa - b^3a + 3bya + bby - yy$. Enfin ſi par $2a + b$ on diviſe la valeur de y dans l'équation $-y + 2aa + ba = 0$, il viendra $-z + a$, qui eſt la cherchée, & qui meſure A & B par $2az + bz - 3aab$ & $-zz + az + bz - ab$.

SEPTIE'ME EXEMPLE.

1°. Trouver la plus grande commune meſure de *A* & de *B*.

2°. On ne ſauroit s'exempter de prendre *y* pour origine, puiſque c'eſt la ſeule lettre qui ſe trouve dans les deux propoſées.

3°. On prend *A* pour diviſeur & *B* pour dividende, parce que l'origine eſt moins élevée dans *A* que dans *B*

4°. Diviſeur *A*.

$y^3 + 4yy + 8y + 8$

Dividende *B*.

$y^4 + 4y^3 + 10yy + 14\frac{x}{2}y + 5$

5°. Pour chaſſer la fraction $\frac{x}{2}$ du quatriéme terme de *B*, ſoit $x = 2y$. Il viendra.

6°. Diviſeur *C*.

$x^3 + 8xx + 32x + 64$

Dividende *D*. Quotient *E*. x

$x^4 + 8x^3 + 40xx + 116x + 80$

Otez $x^4 + 8x^3 + 32xx + 64x$

Reſte *F*. $8xx + 52x + 80$

7°. Diviſeur *F*.

$8xx + 52x + 80$

Dividende *C*.

Premier terme du Quotient *G*.

$$x^3 + 8xx + 32x + 64 \qquad \left\{ \frac{x}{8} \right.$$

8°. La plus grande mesure commune au dénominateur 8 du quotient $\frac{x}{8}$ & à chacun des trois termes de *F*, est 4. Par 4 divisant 8, le quotient est 2. soit $v = 2x$. Il vient au lieu de *F* & de *C*.

Diviseur *H*.

$$8vv + 104v + 320$$

Dividende *I*. Quotient *K*.

$$v^3 + 16vv + 128v + 512 \qquad \left\{ \frac{v}{8} \right.$$

Otez $v^3 + 13vv + 40v$

Reste $3vv + 88v + 512$ $\quad + \frac{3}{8}$

Otez $3vv + 39v + 120$

Reste *L*. $49v + 392$

9°. Diviseur *L*.

$$49v + 392$$

Dividende *H*. Quotient *M*.

$$8vv + 104v + 320 \qquad \left\{ \frac{8v}{49} \right.$$

Otez $8vv + 64v$

Reste $40v + 320$ $\quad + \frac{40}{49}$

Otez $40v + 320$

Reste 0

10°. Les deux membres du Quotient M étans ajoûtés enſemble font la ſomme $\frac{8v + 40}{49}$, & par le dénominateur 49 diviſant L, il vient $v + 8$ pour la plus grande commune meſure de L & de H, & par conſequent pour celle de H & de I. Comme $v = 2x$; ſi dans $v + 8 = 0$ on diviſe par 2 la valeur de v, il viendra $x + 4$ pour la plus grande commune meſure de F & de C, & par conſequent pour celle de C & de D. Enfin, à cauſe de $x = 2y$; ſi dans $x + 4 = 0$ on diviſe par 2 la valeur de x, on aura $y + 2$ pour la cherchée qui meſure A & B par $yy + 2y + 4$ & $y^3 + 2yy + 6y + 2\frac{1}{2}$. Le dénominateur 2 de la fraction $\frac{1}{2}$ du quotient $y^3 + 2yy\ 6y + 2\frac{1}{2}$ ſemble demander que l'on prenne la moitié de la trouvée $y + 2$, ſavoir $\frac{1}{2}y + 1$, pour la plus grande commune meſure de A de B. Mais quoy que $\frac{1}{2}y + 1$ meſure A & B ſans fraction, ſavoir A par $2yy + 4y + 8$ & B par $2y^3 + 4yy + 12y + 5$, l'avantage eſt nul, à l'égard de ce que pour avoir ces deux quotients ſans fraction, l'on eſt obligé de prendre une commune meſure qui a une fraction. Cependant il y a un cas qui rend la plus grande commune meſure $\frac{1}{2}y + 1$ préferable à la plus grande commune meſure $y + 2$. C'eſt lorſque la fraction $\frac{y^3 + 4yy + 8y + 8}{y^4 + 4y^3 + 10yy + 14\frac{1}{2}y + 5}$ étant donnée, on veut l'abreger. Car alors prenant $\frac{1}{2}y + 1$ pour plus grande commune meſure, & non pas $y + 2$, & par $\frac{1}{2}y + 1$ diviſant le numerateur & le dénominateur de la fraction propoſée, la reduction donne $\frac{2yy + 4y + 8}{2y^3 + 4yy + 12y + 5}$, ce qui eſt plus com-

mode que si reduisant par $y + 2$, on écrivoit

$$\frac{y^2 + 2y + 4}{y^3 + 2yy + 6y + 2\frac{8}{9}x}$$

HUITIE'ME EXEMPLE.

On demande la plus grande commune mesure de A & de B.

1°. Comme chaque lettre est commune aux deux proposées, & qu'aucune n'est plus élevée que l'autre, puisqu'elles sont toutes au premier degré, on prendra pour origine la lettre que l'on voudra, & il sera indifferent de prendre *A* ou *B* pour diviseur. Soit l'origine *h*.

Diviseur *A*.

$+ yxvh + 3yxv$
$- 3yvh - 9yv$
$- xvh - 3xv$
$- 2yxh - 6yx$
$+ 3vh + 9v$
$+ 6yh + 18y$
$+ 2xh + 6x$
$- 6h - 18$

Dividende *B*

$+ yxvh + yxv$
$- 3yvh - 3yv$
$- xvh - xv$
$- 2yxh - 2yx$
$+ 3vh + 3v$
$+ 6yh + 6y$
$+ 2xh + 2x$
$- 6h - 6$

2°. On trouve d'abord que *A* & *B* ont pour plus

plus grande commune meſure de chacun de leurs quatre termes la quantité $yxv-3yv-xv-2yx+3v+6y+2x-6$; & par cette quantité diviſant A & B, les quotients ſont C & D.

Diviſeur C		
$h+3$		
Dividende D.	Quotient.	
$h+1$	{	1.
Otez $h+3$		
E. Reſte -2		

3°. L'origine h ne paroît point dans le reſte E. Ainſi C & D n'ont point de commune meſure plus grande que l'unité ; de ſorte que la quantité $yxv-3yv-xv-2yx+3v+6y+2x-6$, que l'on a dû reſerver, eſt la cherchée. Elle meſure A par C & B par D, comme on a vû

4°. Laquelle des autres lettres y, x, v que l'on prenne pour origine, l'on trouvera ſans peine la même choſe.

NEUVIE'ME EXEMPLE.

1°. Il eſt à la page 176 de l'Algebre de Mr Rolle, où il y a une faute d'impreſſion, les deux propoſées A & B devant être comme nous les avons marquées.

2°. On prend z pour origine, comme étant la lettre commune la plus élevée, & A pour diviſeur, parce que l'origine z n'y monte pas ſi haut que dans B.

Diviſeur *A*.

$$daz^3 + dbzz + dcz + ec + eazz + ebz$$

Dividende *B*. Quotient *C*.

$$\left.\begin{array}{l} danz^4 + dnbz^3 + ndczz + cenz + epc \\ + neaz^3 + nebzz + cpdz + c \\ + dapz^3 + eapzz + ebpz \\ + azz + bz \end{array}\right\} + nz$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Otez } danz^4 + dnbz^3 + naczz + cenz \\ + neaz^3 + nebzz \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Reſte } dapz^3 + bdpzz + cpdz + epc \\ + eapzz + ebpz + c \\ + azz + bz \end{array}\right\} + p$$

$$\text{Otez } dapz^3 + bdpzz + cpdz + epc + eapzz + ebpz$$

D. Reſte $azz + bz + c$

Diviſeur D.

$azz + bz + c$

Dividende A.

Quotient E.

$$\begin{array}{l|l}
daz^3 + dbzz + dcz + ec & +dz \\
\quad + eazz + ebz & \\
\text{Otez } daz^3 + dbzz + dcz & \\
\hline
\text{Reſte} \quad eazz + ebz + ec & \\
\text{Otez} \quad eazz + ebz + ec & +e \\
\hline
\text{Reſte } 0 &
\end{array}$$

3°. Le quotient $E = \frac{dz + e}{1}$ fait trouver la cherchée $azz + bz + c$, laquelle meſure A & B; ſavoir A, par $dz + e$, & B, par $dnzz + nez + dpz + ep + 1$.

DIXIE'ME EXEMPLE.

1°. Il eſt propoſé par M Rolle à la page 179. de ſon Algebre, où il y a encore une faute d'impreſſion, les propoſées devant être telles que nôtre A & nôtre B, dont nous avons deſſein de trouver la plus grande commune meſure.

2°. On doit prendre z pour origine comme étant la lettre la plus élevée de celles qui ſont communes : mais il eſt arbitraire de prendre A ou B pour diviſeur, puiſque l'origine z monte également haut dans A & dans B, ſavoir juſques au troiſiéme degré. Prenons A pour le diviſeur & B pour le dividende.

Diviſeur A.

$$6\,ahz^3 + 12\,bhzz + 30\,chz + 45\,cn + 9\,nazz + 18\,bnz$$

Dividende B.

$$18\,hdz^3 + 24\,hezz + 42\,hfz + 63\,fn + 27\,ndzz + 36\,nez$$

3°. Le nombre 3 eſt la plus grande commune meſure de chacun des termes de A & de B. Je le reſerve, & par le même nombre trois, diviſant A & B, les quotients ſont C & D, ſur leſquels il faut operer, & non pas ſur A & B.

Diviſeur C.

$$2\,ahz^3 + 4\,bhzz + 10\,chz + 15\,cn + 3\,nazz + 6\,bnz$$

Dividende D.

Quotient E.

$$6\,hdz^3 + 8\,hezz + 14\,hfz + 21\,fn + 9\,ndzz + 12\,nez \left\{ \frac{3\,d}{a} \right.$$

4°. L'unité eſt la plus grande commune meſure de a, dénominateur du quotient E, & du deuxiéme terme de C.

5°. Soit $y = z \times a$. Il viendra, ſuppoſant $C = 0$, $D = 0$ & chaque valeur de z multipliée par a.

Diviſeur *F*.

$$2ahy^3 + 4abhyy + 10aachy + 15acn^3 \\ 3aanyy + 6aabny$$

Dividende *G*

Quotient *H*.

$$6hdy^3 + 8aheyy + 14aahfy + 21afn^3 \left\{ \frac{3d}{a} \right. \\ + 9andyy + 12aaney$$

Otez $6hdy^3 + 12bdhyy + 30achdy + 45aacnd$
$+ 9andyy + 18abndy$

I. Reſte $8aheyy + 14aahfy + 21afn^3$
$-12bdhyy + 12aaney - 45aacnd$
$-30achdy$
$-18abndy$

Diviſeur *I*.

$$8aheyy + 14aahfy + 21afn^3 \\ -12bdhyy + 12aaney - 45aacnd \\ -30achdy \\ -18abndy$$

Dividende *F*.

$$2ahy^3 + 4abhyy + 10aachy + 15acn^3 \\ + 3aanyy + 6aabny$$

Quotient *K*.

$$\frac{ay}{4ae - 6bd}$$

La plus grande commune meſure de $4ae - 6bd$ & du deuxime terme de *I*, eſt 2, & ce nombre

n'a aucune meſure commune avec le troiſiéme terme de I, laquelle ſurpaſſe l'unité.

Soit $x = y \times 4ae - 6bd$. Les puiſſances de $4aae - 6bd$ ſont, la premiere, $4ae - 6bd$; la deuxiéme, $36ddbb - 48aedb + 16aaee$; la troiſiéme $-216d^3b^3 + 432aeddbb - 288aaedb + 64a^3e^3$, & la transformation donne L & M.

Diviſeur L.

$$8ahexx + 108anddbbx + 756afnddbb$$
$$-12bdhxx + 180achddbx - 1008afnedb$$
$$-144aanedbx - 1620aacnddbb$$
$$-84aahfdbx + 2160acnddeb$$
$$-120aachdex + 336afnee$$
$$+48aneex - 720acndee$$
$$+56ahfex$$

Dividende M.

$$2ahx^3 - 24hadbbxx + 216aanddbx^3$$
$$+16aachbxx - 288anedbbx$$
$$-18aandbxx + 360aachddbbx$$
$$+12anexx - 480acedhbx$$
$$+96aneebx$$
$$+160achceex$$

$$-3240\,adc^{3}n^{3}b$$
$$+6480\,acn^{4}eddbb$$
$$-4320\,acne^{5}edb$$
$$+960\,acn^{6}e^{3}$$

Le nombre 2 eſt la plus grande commune meſure de chacun des termes de *L* & de *M*, & par 2 diviſant *L* & *M*, les quotients ſont *N* & *O*.

Diviſeur *N*.

$$4ahexx+54\,and^{3}dbbx+378\,afnddbb$$
$$-6\,hdbxx+90\,achddbx-810\,aacnd^{3}bb$$
$$-72\,aanedbx-504\,afned^{4}b$$
$$-42\,aahfdbx+1080\,acned^{3}db$$
$$-60\,aacehdx+168\,afne^{5}e$$
$$+24\,anee^{3}x-360\,aecen^{4}d$$
$$+28\,ahefx$$

Dividende *O*.

$$ahx^{3}-12\,hadlbxx+108\,aanddbx-1620\,acnd^{3}b^{3}$$
$$8\,haathxx+180\,aahddchbx+3240\,acned^{4}dbb$$
$$-9\,aandbxx-144\,aend^{3}bbx-2160\,acnee^{5}db$$
$$+6\,anexx^{3}-240\,achedbx^{3}+480\,acne^{6}b^{3}$$
$$+48\,anee^{4}bx$$

Quotient *P*. $\dfrac{ax}{4ae-6db}+$

Otez

$$ahx^{3} - 9aandbxx - 63af^{4}ndbx$$
$$- 15aachdxx + 135ac^{3}nddbx$$
$$+ 6an^{3}exx + 42af^{5}nex$$
$$+ 7ah^{3}fxx - 90ac^{4}nedx$$

Reste

$$-12hadbbxx + 108aanddb^{3}x - 1620a^{3}cn^{3}d^{3}b^{3}$$
$$+ 8haabxx + 180aahddcbbx + 3240ac^{4}neddbb$$
$$+ 15aachdxx - 144ac^{3}endbbx - 2160ac^{5}needb$$
$$- 7ah^{3}fxx + 63af^{4}ndbx + 480ac^{6}ne^{3}$$
$$- 240ac^{3}hedbx$$
$$- 42af^{5}nex$$
$$+ 48an^{4}eebx$$
$$+ 80ac^{4}hexx$$
$$+ 90ac^{4}nedx$$
$$- 135ac^{3}nddbx$$

Otez

Suite du Quotient *P*.

$8aacb - 12adbb + 15aacd - 7a^3f$

$4ae - 6bd$

Otez

$-12hadbbxx - 144a^3ndebbx + 756a^4fnddh^3$
$+8haaebxx - 120a^3chebx - 1620a^3cna^3b^3$
$+15aachdxx + 48a^4neebx - 1008a^5fndebb$
$-7a^3hfxx + 56a^4hfebx + 2160a^4cnedddbb$
$+108aa^3nddbx + 336a^5fneeb$
$+180aachddbbx - 720a^5cneedb$
$-84a^3bdfbbx - 1890a^5cfnddb$
$-135a^3cnddbx + 2025a^4cc^3nd^3b$
$-225a^3ccbddx - 1350a^5ccnedd$
$+90a^4cnedx + 441a^6affndb$
$+210a^4achdfx - 294a^7affne$
$+63a^4afndbx + 1260a^6acfnde$
$-42a^5afnex$
$-49a^5affhx$

Il reſte *P*, qui devient diviſeur, ſavoir :

$49a^5affhx + 294ffnea^7$
$-210a^4acdfhx - 1260cfndea^6$
$-56a^4febhx - 441ffndba^6$
$+80a^4ceehx - 336fneeba^6$

$$-120a^3cdebbx+480cne^3a^6$$
$$+84afdbbbx-1440cneedba^5$$
$$+225acchddx^3+1008fndebba^5$$
$$+1890cfnddba^5$$
$$+1350ccnedda^5$$
$$-2025ccndba^{3\,4}$$
$$+1080cneddbba^4$$
$$-756fnddba^{3\,4}$$

On prend N pour dividende, savoir,

$$4abexx+54anddbbx+378afnddbb^3$$
$$-6bdbxx+90acbddbx-810aacnd^3bb$$
$$-72aanedbx-504afnedb^4$$
$$-42aabfdbx+1080acneddb^3$$
$$-60aacebdx+168afnee^5$$
$$+24aneex^3-360aeecnd^4$$
$$+28abefx^3$$

Quotient Q.

$$4aex-6bdx$$

$$49ffa^5-210cdfa^4-56feba^4$$
$$+80ceea^4-120cdeba^3+$$
$$84fdbba^3+225ecdda^3$$

Otez

$$4aheexx + 24aneex$$
$$-6hddbxx - 72aanedbx$$
$$+54anddbbx$$

Reste la quantité

$$90achddbx + 378afnddbb$$
$$-42aahfdbx - 810aacndbb$$
$$-60aacehdx - 504afnedb$$
$$+28abefx + 1080acnedddb$$
$$+168afnee$$
$$-360aeecnd$$

Suite du Quotient Q.

$$90cddb - 42afdb - 60aced + 28aaef$$

$$49ffa - 210cdfa - 56feba + 80ceea$$
$$-120cdeba + 84fdbbaa + 225ccddaa$$

Otez

$$90achddbx + 378afnddbb$$
$$-42aahfdbx - 810aacndbb$$
$$-60aacehdx - 504afnedb$$
$$+28ahefx + 1080acneddb$$
$$+168afnee$$
$$-360aeecnd$$

Reſte 0

Le quotient Q. eſt la quantité $4aex - 6bdx + 90acddb - 45aafdb - 60naced + 28a^3ef$ ayant pour dénominateur $49ffa^3 - 210cdfa^2 - 56feba + 80ccea^2 - 120cdeba^2 + 84fdbba^2 + 225ccddaa$.

Soit que par le dénominateur de cette fraction l'on diviſe P, ou que par le numerateur l'on diviſe N il viendra pour quotient $hx + 6neaa - 9ndba$, pour la plus grande commune meſure de P & de N, & par conſequent pour celle de N & de O ; & comme pour avoir N & O, on a pris la moitié de L & celle de M ; ſi on double $hx + 6neaa - 9ndba$, la quantité reſultante, ſavoir $2hx + 12neaa - 18ndba$ ſera la plus grande commune meſure de L & M.

Enſuite dans $2hx + 12neaa - 18ndba$ conſiderée comme $= 0$, diviſant la valeur de x par $4ae - 6bd$, il viendra $2hy + 3an$, pour la plus grande commune meſure de I & de F, & par conſequent pour celle de F & de G. Si dans $2hy + 3an = 0$ on diviſe par a la valeur de y, il viendra $2hz + 3n$ pour la plus grande commune meſure de C & de D. Enfin comme C & D ſont le tiers des propoſées A & B ; ſuivant qu'il a été dit au troiſiéme numero ; l'on multipliera par trois la quantité $2hz + 3n$, & le produit $6hz + 9n$ ſera la cherchée & meſurera A par $azz + 2bz + 5c$ & B par $3dzz + 4ez + 7f$.

ONZIE'ME EXEMPLE.

Trouver la plus grande commune meſure de A *&* B.

1°. On peut prendre indifféremment *a* ou *c* pour origine, parce que ce ſont, entre les lettres communes aux deux propoſées, celles qui s'élevent au plus haut degré dans la ſomme deſdites deux propoſées, & que *a* & *c* s'y trouvent également élevées.

2°. Que premieremeut *c* ſoit l'origine.

3°. De cette maniere *A* ſera le diviſeur & *B* le dividende, parce que l'origine *c* ſe trouve plus élevée dans *B* que dans *A*.

Diviſeur *A*.

$$-4ac^3 - 4abcc + 16acc^3 + 16abc^3$$

Dividende *B*.

Quontient *C*.

$$c^4 + 2bc^3 + bbcc - 8aabcc - 16adc^4 \quad \Big| \quad \frac{-c}{4a}$$
$$+ 4aadcc \qquad - 4aabbc$$
$$- 8aacc \qquad + 16aec^4$$

Otez

$$c^4 + bc^3 - 4aacc - 4aabc - 4aabbc$$

Reſte

$$bc^3 + bbcc - 4aabc - 16adc^4 \quad \Big| \quad \frac{-b}{4a}$$
$$+ 4aadcc \qquad - 4aabbc$$
$$- 4aacc \qquad + 16aec^4$$

Otez $b c^3 + bbcc - 4aabec - 4aabbe$

D. Reste $4aadcc * - 16a^4de$

$- 4aaecc + 16a^4ee$

4°. D. devient diviseur & A dividende. Mais comme $4a$ est la plus grande commune mesure de chacun des termes de D & de A, l'on divise D & A par $4a$ & il vient E & F.

Diviseur E.

$adcc * - 4ad^3e$

$- aecc + 4ae^3e$

Dividende F. Quotient G.

$- c^3 - bcc + 4aadc + 4aabe$ | $- c$ / $ad - ae$

Otez

$- c^3 * + 4aaec$

Reste

$- bcc * + 4aabe$ | $- b$ / $ad - ae$

Otez $- bcc * + 4aabe$

Reste 0

5°. Ainsi le quotient total est $\frac{-c-b}{ad-ae}$, & par $ad - ae$ diviseur E, il vient $cc - 4aae$ qui est la cherchée ; & qui mesure A par $-4ac - 4ab$ & B par $cc + 2bc + bb + 4aad - 4aae$.

Seconde façon.

60. Que l'on prenne a pour origine. De cette maniere il faut encore que A ſoit le diviſeur ; parce que a eſt moins élevé dans A que dans B.

Diviſeur A

$$16ecaa^3 * -4becaa$$
$$+16beaa^3 \quad -4caa^3$$

Dividende B.

Quotient C

$$-16deaa^4 * -4bbeaaa * +c^4 \Big\} \frac{ea-da}{c+b}$$
$$+16eeaa^4 \quad -8becaaa \; +2bc^3 \Big\}$$
$$+4dccaaa \; +bbccaa$$
$$-8eccaaa$$

Otez

$$-16deaa^4 * +4dccaaa$$
$$+16eeaa^4 \quad -4eccaaa$$

Reſte D

$$-4bbeaaa * +c^4$$
$$-8becaaa \quad +2bc^3$$
$$-4eccaaa \quad +bbcc$$

7°. D devient diviſeur & A dividende. Chacun de leurs termes ſe meſure par $b+c$ qui eſt leur plus grande commune meſure, & la diviſion donne E & F.

Diviſeur *E*.

$$-4ccaa \;*\; +c^3$$
$$-4cbaa \quad +bcc$$

Dividende *F*.

Quotient *G*.

$$16ca^3 \;*\; -4cca \qquad \left\{ \frac{-4a}{b+c} \right.$$

Otez $16ca^3 * -4cca$

Reſte 0.

80. Par $b+c$ diviſant *E*, il vient $cc-4caa$ qui eſt la cherchée, comme auparavant.

DOUZIE'ME EXEMPLE.

Trouver la plus grande commune meſure des quantitez A, B, C.

1°. La methode des exemples precedens découvrira *K* plus grande commune meſure de *A* & de *B*.

2°. La même methode fera trouver la plus grande commune meſure de *K* & de *C*, laquelle dans l'exemple preſent eſt encore *K*. Voicy le calcul.

Diviſeur *A*.

$$z^3+3zz-34z+48$$

Dividende *B*.

Dividende *B*.

Quotient *H*

$$z^3 + -16zz + 61z - 66 \left\{ 1 \right.$$

Otant $z^3 + 3zz - 34z + 48$

Reste $1 = -19zz + 95z - 114$

Tous les termes de ce reste se peuvent diviser par 19, Ce qui fournit $K = -zz + 5z - 6$

Diviseur K.

$-zz + 5z - 6$

Dividende *A*.

Quotient *L*.

$$z^3 + 3zz - 34z + 48 \left\{ -z - 8 \right.$$

Otez $z^3 - 5zz + 6z$

Il restera $8zz - 40z + 48$

Otez $8zz - 40z + 48$

Il restera 0

Diviseur *K*.

$-zz + 5z - 6$

Dividende *C*.

Quotient *M*.

$$z^4 + 2z^3 - 33zz + 62z - 24 \left\{ -zz - 7z + 4 \right.$$

Otant $z^4 - 5z^3 + 6zz$

Il restera $7z^3 - 39zz + 62z - 24$

Otant $7z^3 - 35zz + 42z$

Il restera $-4zz + 20z - 24$

Il restera 0

C'eſt pourquoy K, c'eſt-à-dire $-zz+5z-6$ ne manquera pas de meſurer les trois quantitez propoſées A, B, C. S'il y avoit eu quatre quantitez propoſées ; on auroit reſolu la queſtion en découvrant la plus grande commune meſure de K, qui meſure A, B, C, & de la quatriéme propoſée ; de ſorte que par nôtre methode l'on peut trouver la plus grande commune meſure d'autant de quantité propoſées que l'on voudra.

3o. En diviſant, on trouve que $-zz+5z-6$ meſure A par $-z-8$, B par $-z+11$ & C par $-zz-7z+4$.

4o. Nous dirons donc que les produiſans que nous avons découverts ſont, ceux de A, $-z+5z-6$ & $-z-8$; ceux de B, $-zz+5z-6$ & $-z+11$; ceux de C $-zz+5z-6$ & $-zz-7z+4$.

5°. Si nous changeons les ſignes de ces trois couples ; les produiſans de A ſeront $z-5z+6$ & $z+8$; ceux de B, $zz-5z+6$ & $z-11$; ceux de C, $zz-5z+6$ & $zz+7z-4$. De cette ſeconde façon, la plus grande commune meſure de A, B, C eſt $zz-5z+6$, au lieu qu'auparavant c'étoit $-zz+5z-6$.

Regle pour trouver les racines communes à deux ou pluſieurs équations, compoſées.

1°. Aprés avoir découvert leur plus grande commune meſure, par la methode que nous avons ſuivie dans les exemples precedens, trouvez les racines de cette plus grande commune meſure, employant pour cet effet les regles de l'Analyſe connuës aujourd'huy par tous les Algebriſtes. Ces racines ſeront le requis.

2°. Icy nous ſuppoſons que l'on a écrit les équations propoſées, ſelon la forme qui met toûjours θ pour ſecond membre. Trois exemples ſuffiront pour éclaircir la regle.

Premier exemple de la Regle.

Soient deux propoſées, l'une
$6ahz^3 + 12bhzz + 30chz + 45cn = \theta$;
$+ 9naz + 18bnz$
L'autre $18hdz^3 + 24hezz + 42hfz + 63fn = \theta$.
$+ 27ndz + 36nez$

3°. Nous avons cy-devant trouvé que leur plus grande commune meſure étoit $6hz + 9n$. J'écris $6hz + 9n = \theta$, & conclus que dans chacune des deux équations propoſées il y a une valeur de $z = \frac{-3n}{2h}$.

Second exemple de la Regle.

4°. Soient deux propoſées, l'une $z^4 - 4az^3 + 11aazz - 20a^3z + 12a^4 = \theta$, l'autre $z^4 - 3az^3 + 12aazz - 16a^3z + 24a^4 = \theta$.

6°. Nous avons cy-devant trouvé leur plus grande commune meſure $zz - az + 6aa$. J'écris $zz - az + 6aa = \theta$ & conclus que dans chacune des deux équations propoſées il y a deux valeurs de z qui leur ſont communes; l'une $z = \frac{1}{2}a + a\sqrt{-5\frac{3}{4}}$, l'autre $z = \frac{1}{2}a - a\sqrt{-5\frac{3}{4}}$, toutes deux imaginaires.

Troiſiéme exemple de la Regle.

6°. Soient trois propoſées; la premiere $z^3 +$

$3zz - 34z + 48 = 0$, la ſeconde $z^3 - 16zz + 61z - 66 = 0$, la troiſiéme $z^4 + 2z^3 - 33zz + 62z - 24 = 0$.

7o. Nous avons trouvé leur plus grande commune meſure $zz - 5z + 6$. J'écris $zz - 5z + 6 = 0$; ce qui fournit deux valeurs de z communes à chacune des trois propoſées, l'une $z = 3$, l'autre $z = 2$.

8o. Au reſte il faut remarquer que chaque racine de la plus grande commune meſure fournit un diviſeur commun à toutes les équations propoſées. C'eſt ainſi que $z - 3 = 0$ & $z - 2 = 0$ ne ſauroient manquer de meſurer les équations propoſées au ſixiéme numero, puiſque $z - 3 = 0$ & $z - 2 = 0$ meſurent $zz - 5z + 6$ comme racines, & que $zz - 5z + 6$ meſure les ſuſdites équations.

PROBLEME.

Obſerver quand les quantitez propoſées n'ont pour commune meſure que l'unité.

1o. Regle. Lorſque nôtre methode, pour la recherche des plus grandes communes meſures, fait diſparoître l'origine, ſoit des quantitez propoſées, ou de leurs transformées, & que neanmoins il reſte encore quelque lettre ou nombre, c'eſt un ſigne certain, que les quantitez propoſées n'ont aucune meſure commune que l'unité, comme il a été obſervé au ſixiéme numero, à l'entrée de ce Traité. Cependant il faut excepter un cas, qui eſt quand tous les termes des propoſées ſont diviſibles par une même lettre ou un même nombre plus grand que l'unité.

PREMIER EXEMPLE.

2°. Que les quantitez propoſées ſoient *A* & *B*. Je cherche leur plus grande commune meſure, comme on voit cy-deſſous.

Diviſeur *A*.

$zz - 5z + 6$

Dividende *B*.

Quotient *C*.

$zz - 9z + 20$

Otant $zz - 5z + 6$ } 1

D. Il reſte $-4z + 14$

A preſent le diviſeur eſt *D* & le dividende *A*. Pour éviter les fractions, il faut transformer. Suppoſons $y = 2z$.

Diviſeur *E*.

$-4y + 28$

Dividende *F*.

Quotient *G*.

$yy - 10y + 24$

Otant $yy - 7y$ } $1 - \frac{y}{4}$

Il reſtera $-3y + 24$

Otant $-3y + 21$ } $+\frac{3}{4}$

H. Il reſtera 3

3°. Dans le reſte *H* il y a quelque choſe, ſavoir le nombre 3 & en même temps l'origine ou lettre principale *y* n'y paroît point. Cela me fait

4°. Si l'on veut néanmoins poursuivre les divisions, que l'on écrive conformément à la methode.

Diviſeur H.

3

Dividende E.

$-4y+28$

Quotient I.

$$\left\{\frac{-4y+28}{3}\right.$$

Otant $-4y+28$

Il reſte 0

5°. Soit que par le numerateur du quotient I l'on diviſe E, ou que par le dénominateur 3 l'on diviſe H, le quotient 1 ſera la plus grande commune meſure de E & de F. Comme dans cette plus grande commune meſure, I, la lettre principale ne ſe trouve point, il eſt manifeſte qu'elle ne ſe trouvera pas non plus dans la plus grande commune meſure des propoſées A, B; ce qui ſoit dit pour verifier la premiere partie de la regle. Pour ce qui eſt de la ſeconde partie en voicy un

EXEMPLE.

6°. Soient les propoſées A, B dont il faille trouver la plus grande commune meſure.

A.

$$6zz-3az+9ac\rangle 9z^3 *$$
$$-3bz-9bc$$

B.

$$+12az-15ab$$
$$+12bz$$

70. Je diviſe A & B par le nombre 3, qui eſt le plus grand qui puiſſe meſurer tous les termes de A & de B. Il vient

Diviſeur C.

$$zzz - az + 3ac - bz - 3bc$$

Dividende D.

$$3z^3 * + 4az - 5ab + 4bz$$

Soit $y = 2z$. Il viendra

Diviſeur E.

$$2yy - 2ay + 12ac - 2by - 12bc$$

Dividende F. Quotient G.

$$3y^3 * + 16ay - 40ab + 16by \qquad \frac{3}{2}y$$

Otant $3y^3 - 3ayy + 18acy - 3byy - 18bcy$

Il reſte $3ayy + 16ay - 40ab + 3byy - 18cay + 18bcy + 16by \qquad + \frac{3}{2}a + \frac{3}{4}b$

Otant $3ayy - 3aay + 18caa + 3byy - 6bay + 18cbb - 3bby$

H. Il reſte $3aay + 18cby - 18caa - 18cay + 16by - 18cbb + 6bay + 3bby - 40ab + 16ay$

A preſent le diviſeur eſt H & le dividende E. Pour les transformer, ſoit $x = y \times 3aa - 18ca + 6ba + 16a + 3bb + 18cb + 16b$

Diviſeur *I.*

$$3aax + 3bbx - 54ca^4 - 324ccbaa - 640bba$$
$$- 18cax + 18cbx + 324cca^3 + 432cbaa + 324ccbba$$
$$+ 6bax + 16bx - 108cba^3 - 240bbaa - 108cba^3$$
$$+ 16ax \quad - 288ca^3 - 640baa - 54cb^4$$
$$- 120ba^3 - 120ba^3 - 324ccb^3$$
$$- 108cbbaa - 1008cbba - 288cb^3$$

Dividende *K.*

$$2xx - 6ax^3 + 108ca^5 - 1164cbaa^3 - 3072cbba$$
$$- 36cax - 1296cca^4 - 216cbaa^3 - 108cb^5$$
$$- 18baax + 324cba^4 + 3072cbaa - 1296ccb^4$$
$$- 32aax + 1152ca^4 + 6912ccbaa - 1152cb^4$$
$$- 18bbax + 216cbba^3 + 2592ccbbaa^{33} - 3888cb$$
$$- 64bax + 3888ca^{33} - 324cba^4 - 6912ccb^3$$
$$- 6bx - 6912cca^3 - 2304cba^3 - 3072cb^3$$
$$- 32bbx + 3072ca^3 + 11664cbba^3$$
$$- 36cbbx + 2304cba^3 + 6912ccbba$$

Quotient *L.*

$$\frac{2x}{3aa - 18ca + 6ba + 16a + 3bb + 18cb + 16b}$$

Otant

Otant

$$2xx - 36caax - 36cbbx - 80bax$$

Il reſte

$$-6ax^3 + 108ca^5 - 18baax - 1296ccca^4 + 2304cba^3 - 1296ccb^4 - 32aax + 324cba^4 - 11664cbaa^3 - 1152cb^4 - 18bbax + 1152ca^4 - 216cbaa^3 - 3888cb^3 + 16bax + 216cbba^3 + 3072cbaa - 6912ccb^3 + 36cbbx + 3888ca^3 + 6912ccbaa - 3072cb^3 - 6b^3x - 6912cca^3 + 2592ccbbaa - 324cba^3 - 2304cba^4 + 11664cbba^3 + 6912ccbba - 3072cbba - 32bbx + 3072ca^3 - 108cb^5$$

Quotient.

$$-6a^3 - 32aa - 18baa - 18bba + 16ba^3 - 6b + 36cbb - 32bb$$

$$3aa - 18ca - 6ba + 16a + 3bb + 18cb + 16b$$

Otant

$$-6ax^3 + 108ca^5 + 108cbba^3 + 324cba^4 - 18baax + 576ca^4 + 108cbaa^3 + 108cb^5 - 32aax + 240ba^4 - 648ccbbaa - 648ccb^4 - 18bbax + 324cba^4 + 720baa^3 + 576cb^4$$

$$+ 16\,bax + 324\,cbba^3 - 640\,bbaa$$
$$+ 36\,cbbx + 1280\,ba^3 + 240\,b^4a$$
$$- 6\,b^3x - 288\,cba^3 + 1280\,b^3a$$
$$- 32\,bbx + 720\,bba^3 - 1728\,cb^3a$$

L. Il reſte

$$576\,ca^4 - 1280\,ba^3 - 720\,b^3aa - 216\,cb^5$$
$$- 1296\,cca^4 - 720\,bba^3 + 640\,bbaa - 648\,ccb^4$$
$$- 240\,ba^4 + 108\,cbba^3 - 576\,cba^3 - 1728\,cb^4$$
$$- 11664\,cbaa^3 + 11664\,cbba^3 - 3888\,cb^3a^3$$
$$+ 3888\,ca^3a^3 - 324\,cbaa^3 + 6912\,ccbba - 6912\,ccb^3$$
$$- 6912\,cca^3 + 3072\,cbaa - 3072\,cbba^3 - 3072\,cb^3$$
$$+ 3072\,ca^3 + 6912\,ccbaa - 240\,b^4a$$
$$+ 2592\,cba^3 + 3240\,ccbbaa - 1280\,b^3a$$
$$- 648\,cb^4a$$

3°. Dans ce dernier reſte *L*, l'origine x ne ſe trouve point, d'où il faut conclure que les deux quantitez propoſées *A*, *B* n'ont aucune plus grande commune meſure que le nombre 3, par lequel nous les avons diviſées au commencement.

DES PUISSANCES & comparaiſons du ſecond degré.

PROBLEME I.

Reſoudre la puiſſance

$$zz \ * \ - b = 0.$$

1° FEIGNONS deux valeurs de z, puiſque la puiſſance propoſée eſt du ſecond degré, la premiere $z - y = 0$, la ſeconde $z + y = 0$, l'une & l'autre réelle, celle-là affirmative, celle-cy negative.

2° La multiplication de $z - y = 0$
par $z + y = 0$ produit

3° $z\,z\,*\ - y\,y = 0$.

4° Chaque terme de la puiſſance du troiſiéme numero eſt égal à chaque terme de la propoſée, le premier au premier, le ſecond au ſecond, le troiſiéme au troiſiéme.

5° Cecy montre que $y\,y = b$

6° L'extraction rend $y = \sqrt{\ } b$,

7° Et comme ſelon le premier numero

$$z = \overset{+}{-} y,$$

8° Il s'enſuit que $z = \overset{+}{-} \sqrt{\ } b$.

9 Ainſi la racine poſitive eſt $z = \surd b$ & la negative $z = -\surd b$

PROBLEME II.

Reſoudre la puiſſance
$zz - az - b = 0$

1° QUe les deux valeurs feintes de z ſoient $y + x$ & $-y + x$, l'une & l'autre réelle, la premiere affirmative, la ſeconde negative.

2° Ainſi $z - y - x = 0$ & $z + y - x 0$.

3° Le produit de ces deux puiſſances multipliées l'une par l'autre eſt

$$zz - 2xz - yy = 0$$
$$+ xx$$

4° Les deuxiéme & troiſiéme termes de cette puiſſance étant comparez, celuy-là au deuxiéme, celuy cy au troiſiéme de la propoſée, il en reſulte les deux qui ſuivent.

5° $2x - a = 0$ &

6° $yy - xx - b = 0$.

7° Le cinquiéme numero rend $2x = a$,

8° D'où reſulte $x = \frac{1}{2}a$.

9° Cecy change le ſixiéme numero en

$$yy - \tfrac{1}{4}aa - b = 0.$$

10° De ſorte que $yy = \frac{1}{4}aa + b$.

11° L'extraction fournit $y = \surd \frac{1}{4}aa + b$.

12° Dans les deux valeurs feintes de z, au premier numero, ſubſtituez $x = \frac{1}{2}a$ & $y = \surd \frac{1}{4}aa + b$,

13 Il viendra la

Reſolution

14° $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + b}$

15° $z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + b}$

16 Et ces deux racines, ou valeurs de z, ſont réelles, la premiere poſitive, la ſeconde negative.

NOMBRES

Pour reſoudre la puiſſance

$$zz - 24z - 52 = 0$$

Icy $a = 24$ & $b = 52$.

C'eſt pourquoy les numero quatorziéme & quinziéme rendent $z = 26$ & $z = -2$.

Examen. $z = 26$ rend $zz - 24z - 52 = 676 - 624 - 52 = 0$.

Si l'on employe $z = -2$, il viendra $zz - 24z - 52 = 4 + 48 - 52 = 0$.

Autrement. La multiplication de $z - 26 = 0$ par $z + 2 = 0$ produit la puiſſance propoſée

$$zz - 24z - 52 = 0.$$

PROBLEME III.

Reſoudre la puiſſance

$$zz - az + b = 0.$$

1° AYant feint deux racines réelles & affirmatives, ſavoir $y + x$ & $y - x$,

2° D'où reſulte $z - y - x = 0$ & $z - y + x = 0$.

3° La multiplication de $z - y - x = 0$ par

$z - y + x = 0$ produit

4° $zz - 2yx + yy = 0$
$- xx$

5° De cette façon $y = \frac{1}{2}a$ & $x = \sqrt{\frac{1}{4}aa - b}$

6° Et les racines feintes deviennent,

La premiere $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - b}$

La ſeconde $\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - b}$

7° L'une & l'autre demande que $\frac{1}{4}aa$ ſurpaſſe ou égale b, afin que x & en même temps z ſoit réelle, ce qui fait deux cas.

8° Le premier cas, $\frac{1}{4}aa < b$, fait $aa < 4b$, & la premiere racine plus grande que la ſeconde.

9° Le ſecond cas, $\frac{1}{4}aa = b$, rend $aa = 4b$ & les deux racines égales entre elles, ſavoir $z = \frac{1}{2}a$ & encore $z = \frac{1}{2}a$, parce que dans ce ſecond cas $\frac{1}{4}aa - b = 0$.

10° A ces deux cas on en doit joindre un troiſiéme, qui eſt quand $\frac{1}{4}aa$ eſt moindre que b, ce qui rend imaginaire la quantité x, & en même temps z.

11° Si l'on veut que dans ce troiſiéme cas x ne ſoit pas imaginaire, mais ſeulement z,

12° Au lieu des deux racines feintes marquées au premier numero, il faudra ſuppoſer que les deux valeurs de z ſont, l'une $y + \sqrt{} - xx$, l'autre $y - \sqrt{} - xx$.

13° * Nous aurons $z - y - \sqrt{} - xx = 0$ & $z - y + \sqrt{} - xx = 0$.

14° La multiplication produira

$zz - 2yz + yy =$
$+ xx$

15° Ainſi $y = \frac{x}{2}a$ & $x = \sqrt{b - \frac{1}{4}aa}$, à cauſe de $xx = b - \frac{1}{4}aa$.

16° La même quantité $xx = b - \frac{x}{4}aa$ rend $-xx = \frac{1}{4}aa - b$.

17° C'eſt pourquoy les racines feintes au douziéme numero deviennent, la premiere $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - b}$, la ſeconde $\frac{x}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - b}$.

18° Ainſi la forme des valeurs de z eſt la même qu'auparavant, bien que la nature de la quantité x ſoit tout-à-fait differente, puiſque la quantité imaginaire, comme on l'appelle ordinairement, telle qu'étoit x au dixiéme numero, n'eſt pas à proprement parler une quantité, mais un indice d'abſurdité cauſée par une ſouſtraction faite mal à propos.

19° En effet la nature de la quantité imaginaire ne conſiſte qu'en ce qu'elle met devant nos yeux une abſurdité qui reſulte des termes de la queſtion propoſée, ſavoir une quantité negative, dont la racine quarrée ſeroit neceſſaire, pour rendre la reſolution parfaite.

Reſolution du premier cas, dans lequel $aa \left[4b.$

$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{x}{4}aa - b}$$
$$z = \frac{x}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - b}$$

Deux racines réelles affimatives.

Reſolution du ſecond cas, dans lequel $aa = 4b.$

$$z = \frac{x}{2}a$$
$$z = \frac{x}{2}a$$

.s, affirmatives & égales.

roiſiéme cas, dans lequel a a]
jorte que $\gamma \frac{1}{4}$ a a — b *eſt une quantité imaginaire.*

$$z = \frac{1}{2} a - + \gamma \overline{\frac{1}{4} aa - b}$$
$$z = \frac{1}{2} a - \gamma \overline{\frac{1}{4} aa - b}$$

Deux racines imaginaires affirmatives.

NOMBRES POUR LE PREMIER CAS.

Reſoudre la puiſſance.
$zz - 20z + 51 = 0$.

Icy $aa = 400$, $4b = 204$, de ſorte que aa [$4b$, ce qui appartient au premier cas. Les formules de ſa reſolution rendent $z = 17$ & $z = 3$.

Examen. Quand $z = 17$, la propoſée $zz - 20z + 51 = 0$ ſignifie $289 - 340 + 51 = 0$.

Et quand $z = 3$, la même propoſée ſignifie $9 - 60 + 51 = 0$.

Autrement. Multiplions $z - 17 = 0$ par $z - 3 = 0$. Le produit ſera la puiſſance propoſée
$zz - 20z + 51 = 0$.

PROBLEME IV.

Reſoudre la puiſſance
$zz + az - b = 0$.

1° DEux racines feintes & réelles étant priſes, l'une affirmative $y - x$, l'autre negative $-y - x$,

2 La

2o La multiplication de $z - y + x = 0$ par $z + y + x \gtrless 0$ produit

3o $zz + 2xz - yy \gtrless 0$
$+ xx$

D'où l'on tire la

Resolution.

$z \gtrless -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + b}$

$z \gtrless -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + b}$

Deux racines réelles, la premiere positive, la seconde negative.

NOMBRES.

Ainsi la puissance

$zz + 20z - 44 \gtrless 0$ a pour racines $z \gtrless 2$; $z \gtrless -22$ & l'examen en est facile.

PROBLEME V.

Resoudre la puissance
$zz + az + b \gtrless 0$.

1o Deux racines feintes & réelles, l'une & l'autre negative étant prises, la premiere $-y + x$, la seconde $-y - x$, la multiplication de $z + y + x \gtrless 0$ produira

2o $zz + 2yz + yy \gtrless 0$
$- xx$

3o D'où l'on tirera

$z \gtrless -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - b}$ &

$z \gtrless -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - b}$

4° Et ce qui eſt ſous le ſigne radical ayant la même forme qu'a l'article troiſiéme, fournira trois cas, comme il y en avoit trois audit article, de ſorte qu'icy le calcul ne contient rien qui puiſſe paroître nouveau.

Reſolution du premier cas, dans lequel

$$aa \mid 4b.$$

$$z = -\tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}aa - b}$$
$$z = -\tfrac{1}{2}a - \sqrt{\tfrac{1}{4}aa - b}$$

Deux racines réelles negatives.

Reſolution du ſecond cas, dans lequel

$$aa = 4b.$$

$$z = -\tfrac{1}{2}a$$
$$z = -\tfrac{1}{2}a$$

Deux racines réelles, negatives & égales.

Reſolution du troiſiéme cas, dans lequel

$aa \rceil 4b$, *de ſorte que* $\sqrt{\tfrac{1}{4}aa - b}$ *eſt une quantité imaginaire.*

$$z = -\tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}aa - b}$$
$$z = -\tfrac{1}{2}a - \sqrt{\tfrac{1}{4}aa - b}$$

Deux racines imaginaires negatives. Il eſt facile de trouver des nombres convenables à chaque cas.

PROBLEME VI.

Reſoudre la puiſſance
$zz * + b \gtrless 0$.

1° Feignons deux valeurs imaginaires de z, l'une $\gamma - yy$, l'autre $- \gamma - yy$, la premiere affirmative, la ſeconde negative.

2° La multiplication de $z - \gamma - yy \gtrless 0$ par $z + \gamma - yy \gtrless 0$ produira

3° $zz * + yy \gtrless 0$.

4° Ainſi $yy \gtrless b$,

5° Et parce que $z \gtrless \overset{+}{-} \gamma - yy$,

6° Nous conclurons que $z \gtrless \overset{+}{-} \gamma - b$

Reſolution

7° $z \gtrless + \gamma - b$
8° $z \gtrless - \gamma - b$

Deux racines imaginaires, la premiere poſitive, la ſeconde negative.

Nous n'avons point mis de nombres ni pour ce Probleme, ni pour le premier & le cinquiéme parce qu'il n'y avoit point de difficulté.

PROBLEME VII.

Reſoudre la comparaiſon
$zz - az - b [0$, ou
$zz [az + b$.

1° J'Ecris $zz \gtrless az + b + \Phi$, & le Probleme ſecond fournit

2° $z \gg \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + b + \Phi}$ &c.

3° $z \gg \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + b + \Phi}$

4° Soit $\sqrt{\frac{1}{4}aa + b} \gg h$

5° Et $\sqrt{\frac{1}{4}aa + b + \Phi} \gg h + K$

6° Ainsi $z \gg \frac{1}{2}a + h + K$

7° Et $z \gg \frac{1}{2}a - h - K$

8° Nous voyons, que selon le sixiéme numero, $z [\frac{1}{2}a + h$

9° Et que selon le sepciéme, $z] \frac{1}{2}a - h$

10° Au lieu de h remettons $\sqrt{\frac{1}{4}aa + b}$; il viendra la

Resolution

11° $z [\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + b}$. De cette façon la quantité z affirme & peut croître à l'infini.

12° $z] \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + b}$. De cette seconde façon z nie & se peut diminuer tant que l'on voudra

NOMBRES

Pour resoudre la comparaison
$zz [20z + 500$.

Premierement $\frac{1}{2}a \gg 10$ & $\sqrt{\frac{1}{4}aa + b}$ ou $\sqrt{600}$, vaut environ $24\frac{1}{2}$. C'est pourquoy, en entiers, z est ou au dessus de 34, ou au dessous de -14, à nôtre choix.

Examen. $z \gg 35$ change la comparaison proposée en $1225 [1200$
$z \gg 36$ rend $1296 [1220$
$z \gg 45$ rend $2025 [1400$

$z \gtrless 46$ rend $2116 \cdot [\ 1420$
$z \gtrless -15$ rend $225\ [\ 200$
$z \gtrless -16$ rend $256\ [\ 180$
$z \gtrless -25$ rend $625\ [\ 0$
$z \gtrless -26$ rend $676\ [\ -20$

PROBLEME VIII.

Reſoudre la comparaiſon
$zz - az - b] 0$, ou
$zz] az + b$

1° J'Ecris $zz \gtrless az + b - \varphi$ & le ſecond Problème fournit

2° $z \gtrless \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + b} - \Phi$ &

3° $z \gtrless \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + b} - \Phi$.

4° Soit $\sqrt{\frac{1}{4}aa + b} \gtrless h$

5° Et $\sqrt{\frac{1}{4}aa + b} - \phi \gtrless h - K$.

6° Ainſi $z \gtrless \frac{1}{2}a + h - K$

7° Et $z \gtrless \frac{1}{2}a - h + K$

8° Nous avons, ſelon le ſixiéme numero, $z] \frac{1}{2}a + h$

9° Et ſelon le ſeptiéme, $z [\frac{1}{2}a - h$

10° Au lieu de h remettons $\sqrt{\frac{1}{4}aa + b}$.

11° Les ſixiéme & ſeptiéme numero fourniront, celuy-là $z] \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + b}$, &

12° Celuy-cy $z [\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + b}$.

13° Par le onziéme numero z affirme, quand on prend pour ſa valeur une quantité quelconque entre 0 & $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + b}$.

14° Par le douziéme numero z nie, quand on

prend pour ſa valeur une quantité quelconque entre la limite negative $\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + b}$ & θ.

15° Dans ce calcul nous imaginons l'auxiliaire Φ au deſſous de $\frac{1}{4}aa + b$, afin que les deuxiéme & troiſiéme numero ne rendent pas z imaginaire.

Reſolution.

z [$^{\theta}$ & en même temps z] $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + b}$, quand on veut que z affirme.

Mais z [$\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + b}$ & en même temps z] θ, quand on veut que z nie.

NOMBRES.

Reſoudre la comparaiſon
zz] $20z + 500$.

La réſolution fait trouver qu'en entiers z eſt ou entre 6 & 35, ou entre -15^{m} & θ, lequel des deux on voudra; de ſorte que tout nombre entre -15 & $+35$ réüſſira.

$z \gtrless 34$ change la propoſée en 1156] 1180.
$z \gtrless -14$ rend 196] 220
$z \gtrless 33$ rend 1089] 1160
$z \gtrless 32$ rend 1024] 1140
$z \gtrless -12$ rend 144] 260.

PROBLEME IX.

Reſoudre la comparaiſon
$zz - az + b [0$, ou
$zz [az - b$

1° SI l'on écrit $zz \supset az - b + \varphi$,

2° Le premier cas du Probleme troiſiéme fournira

$$z \supset \tfrac{1}{2} a + \sqrt{\tfrac{1}{4} aa - b + \varphi}, \&$$

3° $z \supset \tfrac{1}{2} a - \sqrt{\tfrac{1}{4} aa - b + \Phi}$

4° Et ce premier cas ſuppoſe $\tfrac{1}{4} aa [b$

5° Soit $\sqrt{\tfrac{1}{4} aa - b} \supset h$

6° Et $\sqrt{\tfrac{1}{4} - b + \Phi} \supset h + K$

7° Ainſi $z \supset \tfrac{1}{2} a + h + K$

8° Et $z \supset \tfrac{1}{2} a - h - K$

9° Le ſeptiéme numero rend $z [\tfrac{1}{2} a + h$,

10° Et le huitiéme fait $z] \tfrac{1}{2} a - h$

11° La premiere limite montre que

$$z [\tfrac{1}{2} a + \sqrt{\tfrac{1}{2} aa - b},$$

12° La ſeconde que $z] \tfrac{1}{2} a - \sqrt{\tfrac{1}{4} aa - b}$

13° Par le quatriéme numero, $\sqrt{\tfrac{1}{4} aa - b}$ eſt une quantité réelle affirmative,

14° Et de plus il eſt manifeſte que $\tfrac{1}{2} a [\sqrt{\tfrac{1}{4} aa - b}$.

15° C'eſt pourquoy non ſeulement le onziéme numero rend z affirmative, mais de plus le douziéme permet de prendre z encore affirmative.

Deuxiéme cas dans lequel
$aa \gtrdot 4b$.

160 Le ſecond numero ſignifie de cette façon, que $z \gtrdot \frac{1}{2}a + \Upsilon\,\Phi$,

170 Et le troiſiéme, que $z \gtrdot \frac{1}{2}a - \Upsilon\,\Phi$.

180 Ainſi $z \lessdot \frac{1}{2}a$

190 Et $z \gtrless \frac{1}{2}a$

Troiſieme cas dans lequel
$aa \gtrless 4b$

200 Soit l'auxiliaire $\Phi \lessdot b - \frac{1}{4}aa$.

210 De cette façon les ſecond & troiſiéme numero ſeront réels.

220 Soit $\Upsilon \frac{1}{4}aa - b + \Phi \gtrdot$

230 Cecy changera le ſecond numero en $z \gtrdot \frac{1}{2}a + b$,

240 Et le troiſiéme en $z \gtrdot \frac{1}{2}a - b$.

250 C'eſt pourquoy $z \lessdot \frac{1}{2}a$, ſi l'on veut;

260 Et $z \gtrless \frac{1}{2}a$ ſi on l'aime mieux.

270 Soit dans la propoſée la quantité $z \gtrdot \frac{1}{2}a$.

280 Il en reſultera $\frac{1}{4}aa \gtrless b$, ce qui eſt le même que $aa \gtrless 4b$, comme ce troiſiéme cas veut que l'on ſuppoſe.

290 Soit enfin $z \gtrdot -\frac{1}{2}a$

300 La propoſée rendra $-\frac{3}{4}aa + b \lessdot 0$, ce qui eſt neceſſairement vray.

310 Puiſque ſelon qu'on le juge à propos, z eſt au deſſus ou au deſſous de $\frac{1}{2}a$, & que même ſi l'on veut, z égale ſoit $\frac{1}{2}a$ ou $-\frac{1}{2}a$, nous conclurons que dans ce troiſiéme cas il eſt permis de prendre pour z quelque quantité réelle que ce ſoit, affirmative ou negative.

Reſolution

Reſolution du premier cas, dans lequel
$aa \left[4b.\right.$

$z \left[\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - b}.\right.$ Ainſi z affirmera & pourra croître à l'infini.

$z \left[0$ & en même temps $\right] \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - b}.$ Ainſi z affirmera derechef.

$z \left] 0.\right.$ Ainſi la quantité z ſera negative & pourra devenir plus petite à l'infini.

Reſolution du ſecond cas, dans lequel
$aa \left] 4b\right.$

$z \left[\frac{1}{2}a.\right.$ Ainſi z affirmera & pourra s'augmenter à l'infini

$z \left[0$ & en même temps $z \left] \frac{1}{2}a.\right.$ De cette façon z affirmera derechef,

$z \left] 0\right.$, quand on voudra que z ſoit negative. De cette façon z ſe pourra diminuer à l'infini.

Reſolution du troiſiéme cas, dans lequel,
$aa \left] 4b.\right.$

$z \left[0\right.$, ſi vous voulez que z affirme.

$z \left] 0\right.$, ſi voulez que z nie.

NOMBRES POUR LE PREMIER CAS.

Reſoudre la comparaiſon
$zz \left[60z - 500.\right.$

La reſolution met z ou au deſſus de 50, ou au deſſous de 10, même au deſſous de 0.

Examen. $z \mathrel{)\!(} 51$ rend 2601 [2560.
$z \mathrel{)\!(} 9$ rend 81 [40.
$z \mathrel{)\!(} 52$ rend 2704 [2620.
$z \mathrel{)\!(} 8$ rend 64 [— 20.
$z \mathrel{)\!(} -10$ rend 100 [— 1100.

NOMBRES POUR LE SECOND CAS.

Resoudre la comparaison

zz [$60z - 900$.

z est au dessus ou au dessous de 30 ; même au dessous de 0 si l'on veut.

Examen. $z \mathrel{)\!(} 31$ rend 961 [960.
$z \mathrel{)\!(} 29$ rend 841 [840.
$z \mathrel{)\!(} 61$ rend 3721 [2760.
$z \mathrel{)\!(} -1$ rend 1 [— 960.

NOMBRES POUR LE TROISIE'ME CAS.

Resoudre la comparaison

zz [$60z - 1200$.

z est au dessus ou au dessous de 0, comme l'on jugera à propos. Examen.
$z \mathrel{)\!(} 10$ rend 100 [— 600.
$z \mathrel{)\!(} -100$ rend 10000 [— 7200.
$z \mathrel{)\!(} 30$ produit 900 [600.
$z \mathrel{)\!(} -30$ produit 900 [— 3000.

PROBLEME X.

Reſoudre la comparaiſon
$zz - az + b] 0$, ou
$zz [az - b$.

1° ECrivant $zz \supset az - b - \Phi$, le premier cas du troiſiéme Probleme fournit

2° $z \supset \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - b} - \Phi$, &

3° $z \supset \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - b} - \Phi$,

4° Les deuxiéme & troiſiéme numero rendant z réelle affirmative, quand on ſuppoſe, comme nous faiſons, $\frac{1}{4}aa [b$ & l'auxiliaire $\Phi] \frac{1}{4}aa - b$.

5° Soit $\sqrt{\frac{1}{4}aa - b} \supset h$,

6° Et $\sqrt{\frac{1}{4}aa - b - \Phi} \supset h - K$,

7° Il viendra $z \supset \frac{1}{2}a + h - K$

8° Et $z \supset \frac{1}{2}a - h + K$.

9° Ainſi $z] \frac{1}{2}a + h$

10° Et $z [\frac{1}{2}a - b$.

11° C'eſt pourquoy, à cauſe du cinquiéme numero $z] \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - b}$

12° Et $z [\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - b}$.

13° C'eſt pourquoy dans ce cas, z ſera toûjours reſſerrée entre deux limites affirmatives.

Du ſecond cas dans lequel
$aa \supset 4b$.

14° Le ſecond numero devient $z \supset \frac{1}{2}a + \sqrt{\ } - \Phi$,

150 Et le troiſiéme ſe change en $z \gtrless \frac{1}{2}a - \Upsilon - \Phi$.

160 C'eſt pourquoy des deux façons z eſt imaginaire & l'auxiliaire Φ arbitraire.

Du troiſiéme cas, dans lequel $-\frac{1}{4}aa] b$.

Le deuxiéme & troiſiéme numero demeurent tels qu'ils étoient au premier, eu égard aux lettres & aux ſignes. Cela n'empêche pas que dans le troiſiéme cas z ne ſoit imaginaire ; car comme dans ce troiſiéme cas là quantité $-\frac{1}{4}aa - b$ eſt déja au deſſous de 0 ; à plus forte raiſon la quantité $-\frac{1}{4}aa - b - \Phi$ doit-elle être negative, & ſa racine imaginaire.

Reſolution du premier cas, dans lequel $aa [4b$.

$z] \frac{1}{2}a + \Upsilon \overline{-\frac{1}{4}aa - b}$, avec $z [\frac{1}{2}a - \Upsilon \overline{-\frac{1}{4}aa - b}$. La quantité z priſe entre ces deux limites affirmera & ne réüſſira point hors de leur interſtice.

Reſolution du ſecond cas, dans lequel $aa \gtrless 4b$.

Φ arbitraire. $z \gtrless \frac{1}{2}a + \Upsilon - \Phi$.
Ainſi z ſera imaginaire affirmative.

Φ arbitraire. $z \gtrless \frac{1}{2}a - \Upsilon - \Phi$.
Ainſi z ſera encore imaginaire affirmative.

Resolution du troisiéme cas, dans lequel $aa \rceil 4b$

Φ arbitraire. $z \gg \frac{1}{2}a + \Upsilon \frac{1}{4}aa - b - \Phi$.
Ainsi z est imaginaire affirmative.

Φ arbitraire $z \gg \frac{1}{2}a - \Upsilon \frac{1}{4}aa - b - \Phi$.
Ainsi z est encore imaginaire affirmative.

NOMBRES POUR LE PREMIER CAS.

Resoudre la comparaison
$zz \rceil 60z - 500$.

La resolution de ce cas fait tomber z entre 50 & 10 Examen.
$z \gg 49$ produit 2401] 2440.
$z \gg 11$ produit 121] 160.

NOMBRES POUR LE SECOND CAS.

Resoudre la comparaison
$\zeta z \rceil 60z - 900$.

Si nous prenons $\varphi \gg 10$,
La formule $\zeta \gg \frac{1}{2}a + \Upsilon - 10$ signifiera $890 + 60\Upsilon - 10 \rceil 900 + 60\Upsilon - 10$, ou $890 \rceil 900$.
Soit derechef $\varphi \gg 10$.
La formule $\zeta \gg \frac{1}{2}a - \Upsilon - 10$ signifiera $890 - 60\Upsilon - 10 \rceil 900 - 60\Upsilon - 10$, ou $890 \rceil 900$.

NOMBRES POUR LE TROISIE'ME CAS.

Reſoudre la comparaiſon
$zz \rceil 60z - 1200$.

Prenant $\varphi \supset 10$, la formule $z \supset \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - b - \Phi}$ ſe change en $z \supset 30 + \sqrt{-310}$; de ſorte que la propoſée rend $590 + 60\sqrt{-310} \rceil 600 + 60\sqrt{-310}$, ou $590 \rceil 600$.
Prenons derechef $\varphi \supset 10$.

La formule $z \supset \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - b - \varphi}$ ſe Changera en $z \supset 30 - \sqrt{-310}$; & ainſi la propoſée rendra $590 - 60\sqrt{-310} \rceil 600 - \sqrt{-310}$, ou $530 \rceil 600$.

PROBLEME XI.

Reſoudre la comparaiſon
$zz + az - b \lceil 0$, ou
$zz \lceil -az + b$.

1° SI nous écrivons $zz \supset -az + b + \Phi$, le Probleme quatriéme
2° Fournira $z \supset -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + b + \Phi}$
3° Et $z \supset -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + b + \Phi}$.
4° Soit $\sqrt{\frac{1}{4}aa + b} \supset h$
5° Et $\sqrt{\frac{1}{4}aa + b + \Phi} \supset h + K$.
6° Nous aurons $z \supset -\frac{1}{2}a + b + K$
7° & $z \supset -\frac{1}{2}a - b - K$.
8° Par conſequent ou $z \lceil -\frac{1}{2}a + b$

9° Ou $z] - \frac{1}{2} a - b$.

10° Ce qui eſt le même que

$z [- \frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{1}{4} aa + b}$, quand on veut avoir z poſitive,

11° Et que $z] - \frac{1}{2} a - \sqrt{\frac{1}{4} aa + b}$, quand on veut avoir z negative.

Reſolution

$z [- \frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{1}{4} aa + b}$. Ainſi z affirmera & pourra s'augmenter à l'infini.

$z] - \frac{1}{2} a - \sqrt{\frac{1}{4} aa + b}$. Ainſi z niera & pourra décroître à l'infini.

NOMBRES. PREMIER EXEMPLE.

Reſoudre la comparaiſon

$zz [- 6z + 40$.

La reſolution fournit $z [4$ & $z [- 10$.

Examen.

z ↀ 5 rend 25 [10.

z ↀ — 11 rend 121 [— 26.

SECOND EXEMPLE.

Reſoudre la comparaiſon

$zz [- 2z + 15$.

L'on trouvera $z [3$, & $z] - 5$. Examen:

z ↀ 4 rend 16. [7.

z ↀ — 6 rend 36 [27.

PROBLEME XII.

Resoudre la comparaison
$zz + az - b \rceil \theta$, ou
$zz \rceil - az + b$.

1° SI l'on écrit $zz \gtrless - az + b - \varphi$, le quatriéme Probleme fournira

2° $z \gtrless - \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + b - \varphi}$,

3° Et $z \gtrless - \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + b - \Phi}$

4° Concevant $\Phi \rceil \frac{1}{4}aa + b$.

5° Soit $\sqrt{\frac{1}{4}aa + b} \gtrless h$, &

6° $\sqrt{\frac{1}{4} + b - \varphi} \gtrless h - K$.

7° Nous aurons $z \gtrless - \frac{1}{2}a + h - K$

8° Et $\zeta \gtrless - \frac{1}{2}a - h + K$.

9° C'eſt pourquoy $z \rceil - \frac{1}{2}a + h$

10° Et $\zeta [- \frac{1}{2}a - h$.

11° Ainſi $z \rceil - \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + b}$

12° Et $\zeta [- \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + b}$.

13° Le numero onziéme, avec $z [\theta$, quand on voudra que z affirme.

14° Le douziéme, avec $z \rceil \theta$, quand on voudra que ζ nie.

Reſolution

$\zeta [\theta$, avec $z \rceil - \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + b}$, afin que z affirme.

$\zeta \rceil \theta$, avec $z [- \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + b}$, afin que z nie.

NOMBRES.

Resoudre la comparaison
$zz] - 2z + 15.$

z tombe ou entre 0 & 3, ou entre -5 & 0.
$z \supset 2$ rend 4] 11.
$z \supset -3$ rend 9] 21.

PROBLEME XIII.

Resoudre la Comparaison
$zz + az + b$ [0, ou
zz [$- az - b$.

1° Si nous écrivons $\zeta z \supset -az - b + \Phi$, le premier cas du cinquiéme Probleme

2° Fournira $z \supset -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - b + \Phi}$

3° Et $z \supset -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - b + \Phi}$

4° Soit $\sqrt{\frac{1}{4}aa - b} \supset h$

5° Et $\sqrt{\frac{1}{4}aa - b + \Phi} \supset h + K.$

6° Ainsi $z \supset -\frac{1}{2}a + h + K$

7° Et $z \supset -\frac{1}{2}a - h - K.$

8° Donc z [$-\frac{1}{2}a + h$

9° Et ζ] $-\frac{1}{2}a - h.$

10° Ainsi z [$-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - b}$;

11° Et z] $-\frac{1}{2}a - \sqrt{-\frac{1}{4}aa - b}.$

12° Selon le dixiéme numero, toute quantité affirmative prise pour z resoudra le Probleme.

13° Selon le même numero, z [$-\frac{1}{2}a + \sqrt{}$

$\frac{1}{4}aa - b$, & en même temps] θ, resoudra aussi.

140 Par le onziéme l'on trouvera une suite infinie de z negatives, lesquelles iront toûjours en décroissant..

Du second cas, dans lequel $aa \mathrel{\text{Ɔ}} 4b$.

150 Le second numero se change en $z \mathrel{\text{Ɔ}} -\frac{1}{2}a + \Upsilon\,\Phi$,

160 Le troisiéme en $z \mathrel{\text{Ɔ}} -\frac{1}{2}a - \Upsilon\,\Phi$.

170 Ainsi $z \mathrel{[} -\frac{1}{2}a$, si l'on veut,

180 Et $z \mathrel{]} -\frac{1}{2}a$, si on l'aime mieux.

190 Par le dix-septiéme numero toute quantité positive peut se prendre pour z, comme aussi toute quantité negative entre $-\frac{1}{2}a$ & θ.

200 Par le dix-huitiéme, toute quantité negative moindre que $-\frac{1}{2}a$ étant prise pour z resoudra le Probleme.

Du troisiéme cas, dans lequel $aa \mathrel{]} 4b$.

210 Si l'on imagine $\Phi \mathrel{[} b - \frac{1}{4}aa$,

220 L'on pourra écrire $\Upsilon \overline{\frac{1}{4}aa - b} + \Phi \mathrel{\text{Ɔ}} b$.

230 Ainsi par le numero deuxiéme, $\zeta \mathrel{\text{Ɔ}} -\frac{1}{2}a + b$

240 Et par le troisiéme, $z \mathrel{\text{Ɔ}} -\frac{1}{2}a - b$.

250 C'est pourquoy $z \mathrel{[} -\frac{1}{2}a$

260 Et $z \mathrel{]} -\frac{1}{2}a$, lequel des deux on voudra.

270 Mettons $-\frac{1}{2}a$ dans la proposée, au lieu de z.

28° Il en reſultera $\frac{1}{4} aa] b$, & par conſequent $aa] 4b$, ce que ſuppoſe le cas dont il s'agit icy.

29° Mettons $\frac{1}{2} a$ dans la propoſée au lieu de z.

30° Le reſultat ſera $\frac{1}{4} aa + b [0$, ce qui ne ſauroit manquer d'être vray.

31° Ces choſes font voir que quelque quantité ſoit affirmative, ou negative que l'on prenne pour z, le Probleme ſe reſoudra toûjours.

Reſolution du premier cas, dans lequel aa [4b.

$z [0$, quand on veut avoir z affirmative. Ainſi z ſera auſſi grande qu'il nous plaira.

$z [-\frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{1}{4} aa - b}$, avec $z] 0$, pour avoir z negative entre ces deux limites.

$z] -\frac{1}{2} a - \sqrt{\frac{1}{4} aa - b}$. Ainſi nous aurons, en deſcendant, une ſuite infinie de quantitez z negatives.

Reſolution du ſecond cas, dans lequel aa > 4b.

$z [0$, pour avoir une ſuite infinie de quantitez z affirmatives.

$z [-\frac{1}{2} a$, avec $z] 0$, afin que z nie entre ces deux limites.

$z] -\frac{1}{2} a$, pour avoir, en deſcendant, une ſuite infinie de quantitez z negatives.

Reſolution du troiſiéme cas, dans lequel
aa] 4 *b.*

Quelque quantité, ſoit affirmative ou negative, que l'on prenne pour z, le Probleme ſe reſoudra.

NOMBRES POUR LE PREMIER CAS.

Reſoudre la comparaiſon
zz [— 80 z — 300.

L'on peut prendre pour z le nombre affirmatif que l'on voudra, ou z entre θ & — 4, en entiers, ou enfin en entiers pareillement, z au deſſous de — 76. Examen.

z ⟩ 10 rend 100 [— 1100.
z ⟩ — 3 rend 9 [— 60.
z ⟩ — 77 rend 5929 [5860.

NOMBRES POUR LE SECOND CAS

Reſoudre la comparaiſon
zz [— 80 z — 1600.

On peut prendre pour z quelque nombre affirmatif que ce ſoit, ou tout nombre negatif entre — 40 & θ, ou enfin tout nombre negatif au deſſous de — 40. Examen. z ⟩ 10 rend 100 [— 2400.
z ⟩ — 39 rend 1521 [1520.
z ⟩ — 41 rend 1681 [1680.

NOMBRES POUR LE TROISIE'ME CAS.

Reſoudre la comparaiſon
$zz[- 60z - 1200.$

$z \supset 1$ rend $1[- 1260.$
$z \supset - 1$ rend $1[- 1140.$
$z\ 30 = 1$ rend $900[- 3000.$
$z \supset - 30$ rend $900[600.$

PROBLEME XIV.

Reſoudre la comparaiſon
$zz + {}^{a}z + b]\theta$, ou
$zz] - az - b.$

1° ECrivons $zz \supset - az - b - \varphi$. Le premier cas du cinquiéme Probleme fournira

2° $z \supset - \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - b - \varphi}$ &

3° $z \supset - \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - b - \varphi}$;

4° L'auxiliaire Φ étant imaginée au deſſous de $\frac{1}{4}aa - b$.

5° Soit $\sqrt{\frac{1}{4}aa - b} \supset h$,

6° Et $\sqrt{\frac{1}{4}aa - b - \Phi} \supset h - K$.

7° Ainſi $z \supset - \frac{1}{2}a + h - K$,

8° Et $z \supset - \frac{1}{2}a - h + K$;

9° De ſorte que $z] - \frac{1}{2}a + h$, ſi l'on veut,

10° Et que $z[- \frac{1}{2}a - h$, ſi on l'aime mieux.

11° Ce qui montre que toûjours $z] - \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - b}$, & qu'en

12° Même temps $z[- \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - b}$;

13° De ſorte que la quantité z étant ſituée entre ces deux limites eſt neceſſairement negative.

Du ſecond cas, dans lequel

$$aa \gtrless 4b$$

14° Le ſecond numero devient

$$z \gtrless -\tfrac{1}{2}a + \Upsilon - \Phi;$$

15° Le troiſiéme devient

$$z \gtrless -\tfrac{1}{2}a - \Upsilon - \Phi.$$

16° C'eſt pourquoy ſous le ſigne radical il n'y a de lettre que l'arbitraire Φ, & les quatorziéme & quinziéme numero rendent z imaginaire negative.

Du troiſiéme cas, dans lequel

$$aa] 4b.$$

17° Le ſecond & troiſiéme numero ſont imaginaires, à cauſe de $\frac{1}{4}aa - b$ déja au deſſous de 0.

Reſolution du premier cas, dans lequel

$$aa [4b.$$

$z] -\frac{1}{2}a + \Upsilon \overline{\frac{1}{4}aa - b}$ avec

$z [-\frac{1}{2}a - \Upsilon \overline{\frac{1}{4}aa - b}$, les deux enſemble, de ſorte que z nie toûjours.

Reſolution du ſecond cas, dans lequel

$$aa \gtrless 4b.$$

Φ arbitraire. $z \gtrless -\frac{1}{2}a + \Upsilon - \Phi.$

De cette premiere façon z eſt imaginaire negative.

Φ arbitraire. $z \mathrel{\mathfrak{D}} -\frac{1}{2}a - \Upsilon - \Phi$.

De cette ſeconde façon z eſt derechef imaginaire negative.

Reſolution du troiſiéme cas, dans lequel $aa \mathrel{]} 4b$.

φ arbitraire. $\zeta \mathrel{\mathfrak{D}} -\frac{1}{2}a + \Upsilon \overline{\frac{1}{4}aa - b} - \Phi$.

De cette premiere façon, z eſt imaginaire negative.

φ arbitraire. $z \mathrel{\mathfrak{D}} -\frac{1}{2}a - \Upsilon \overline{\frac{1}{4}aa - b} - \varphi$.

De cette ſeconde façon, z eſt derechef imaginaire negative.

NOMBRES POUR LE PREMIER CAS.

Reſoudre la comparaiſon
$zz \mathrel{]} -60z - 500$.

Icy z eſt entre -50 & -10.
Examen. $z \mathrel{\mathfrak{D}} -11$ rend $121 \mathrel{]} 160$.
$z \mathrel{\mathfrak{D}} -49$ rend $2401 \mathrel{]} 2440$.

NOMBRES POUR LE SECOND CAS.

Reſoudre la comparaiſon
$zz \mathrel{]} -60z - 900$.

Prenons $\Phi \mathrel{\mathfrak{D}} 1$ avec $z \mathrel{\mathfrak{D}} -\frac{1}{2}a + \Upsilon - \Phi$. Il viendra $\zeta \mathrel{\mathfrak{D}} -30 + \Upsilon - 1$, & de cette façon la comparaiſon propoſée ſignifiera $899 - 60\Upsilon - 1 \mathrel{]} 900 - 60\Upsilon - 1$, c'eſt-à-dire $899 \mathrel{]} 900$

Prenons derechef $\Phi \mathrel{\mathfrak{D}} 1$, mais $\zeta \mathrel{\mathfrak{D}} -\frac{1}{2}a$

— γ — Φ. Il viendra $z \supset\!\!\!\supset$ — 30 — γ — 1; & la comparaiſon propoſée ſe changera en 899 + 60 γ — 1] 900 + 60 γ — 1; ce qui eſt le même que 899] 900.

NOMBRES POUR LE TROISIE'ME CAS.

Reſoudre la comparaiſon
zz] — 60 z — 1200.

Prenons $\Phi \supset\!\!\!\supset$ 1. La formule $z \supset\!\!\!\supset -\frac{1}{2}a + \gamma \frac{1}{4}aa - b - \Phi$ rendra $z \supset\!\!\!\supset$ — 30 + γ — 301, & la comparaiſon propoſée ſe changera en 599 — 60 γ — 301] 600 — 60 γ — 301, ce qui eſt le même que 599] 600.

Soit derechef $\Phi \supset\!\!\!\supset$ 1; mais $z \supset\!\!\!\supset -\frac{1}{2}a - \gamma \frac{1}{4}a - b - \Phi$. Il viendra $z \supset\!\!\!\supset$ — 30 — γ — 301, & la propoſée ſe changera en 599 + 60 γ — 301] 600 + 60 γ — 301, ce qui ſignifie 599] 600.

PROBLEME XV.

Reſoudre la comparaiſon
$zz * - b [\theta$,
ou $zz [b$.

1° AYant écrit $zz \supset\!\!\!\supset b + \Phi$;
2° Le premier Probleme fournit $z \supset\!\!\!\supset \gamma b + \Phi$,
3° Et $z \supset\!\!\!\supset -\gamma b + \phi$.
4° Soit $\gamma b \supset\!\!\!\supset b$
5° Et $\gamma b + \phi \supset\!\!\!\supset b + K$.

6° Nous

6° Nous aurons $z \supset h + K$,
7° Et $z \supset -h - K$.
8° Ainſi $z [h$
9° Et $z] -h$.
10° Remettant Υb au lieu de h,
11° Il vient $z [\Upsilon b$.
12° Et $z] - \Upsilon b$.

Reſolution.

$z [\Upsilon b$, ſi l'on veut, ou
$z] - \Upsilon b$, ſi on l'aime mieux.

NOMBRES.

Reſoudre la comparaiſon
$zz^* - 100 [\theta$, ou
$z z [100$.

Prenant $z \supset 11$, il vient $121 [100$, & ſi l'on prend $z \supset -11$ il viendra tout de même $121 [100$.

PROBLEME XVI.

Reſoudre la comparaiſon
$zz^* - b] \theta$, ou
$z z] b$.

1° ECrivons $zz \supset b - \varphi$.
2° Le premier Probleme fournira

$$z \supset \Upsilon b - \varphi$$

3° Et $z \supset -\Upsilon b - \varphi$,
4° Imaginant dans ce calcul, que φ eſt au deſſous de b;

5° Soit $\gamma\ b \supset b$

6° Et $\gamma\ b - \varphi \supset b - K$.

7° Le ſixiéme numero changera les deuxiéme & troiſiéme, l'un en

$z \supset b - K$,

8° L'autre en $z \supset -b + K$.

9° Ainſi $z \rceil b$, c'eſt-à-dire $z \rceil \gamma\ b$.

10° Et $z [- b$, c'eſt-à-dire $z [- \gamma\ b$.

11° De ſorte que z eſt entre ces deux limites.

Reſolution.

z affirme entre θ & $\gamma\ b$.
z nie entre $-\gamma\ b$ & θ.

NOMBRE 9

Reſoudre la comparaiſon

$zz \rceil 100$.

Icy z eſt entre θ & 10, ou entre -10 & θ,

Examen.

$z \supset 9$ rend $81 \rceil 100$.
$z \supset -9$ rend de même $81 \rceil 100$.

PROBLEME XVII.

Reſoudre la comparaiſon

$zz * + b [\theta$, ou
$zz [- b$.

1° ECrivons $zz \supset -b + \Phi$.

2° Le ſixiéme Probleme fournira

$$z \gtrless \gamma - b + \Phi \;\&$$

$$z \gtrless - \gamma - b + \Phi.$$

3o Imaginant dans ce calcul, que Φ ſurpaſſe b, il viendra pour

Reſolution

4o Que z peut valoir quelque quantité affirmative ou negative que ce ſoit ; de ſorte qu'icy z eſt abſolument arbitraire.

NOMBRES.

Reſoudre la comparaiſon

$$zz \,[\, -100.$$

Puiſque tout nombre poſitif ou negatif reſout le Probleme, ſoit $z \gtrless 1$. La propoſée ſignifiera que 1 ſurpaſſe -100.

Soit, ſi l'on veut, $z \gtrless -1$. Il viendra, comme auparavant, $1 \,[\, -100$.

PROBLEME XVIII.

Reſoudre la comparaiſon

$$zz * + b \,]\, \theta, \text{ ou}$$

$$zz \,] \,\text{—}\, b.$$

1o ECrivant que $zz \gtrless - b - \varphi$,

2o Le ſixiéme Probleme fera trouver pour

Reſolution

φ Lettre ou quantité arbitraire.

$z \supset \Upsilon - b - \Phi$,
ou si l'on veut
Φ derechef arbitraire, avec
$z \supset - \Upsilon - b - \Phi$.

NOMBRES.

Resoudre la comparaison
$zz] - 10$.

Soit $\Phi \supset 1$. Il viendra $z \supset \Upsilon - 11$ & la proposée signifiera $- 11] - 10$.

Soit derechef $\Phi \supset 1$, mais $z \supset - \Upsilon - 11$, Il viendra, comme auparavant $- 11] - 10$.

PROBLEME XIX.

Trouver les diviseurs d'une quantite litterale donnée, ou aucune lettre ne monte plus haut que le premier degré.

1° ECrivez la proposée, en prenant pour origine celle de ses lettres qu'il vous plaira.

2° La commune mesure du premier terme & du deuxiéme se pourra trouver par la methode que nous avons enseignée, & sera un diviseur de la proposée.

3° Si ce diviseur en a quelqu'autre, l'on pourra le trouver de la même façon, & ainsi continuer jusqu'à ce que l'on soit parvenu à un diviseur primitif. Par ce moyen l'on obtiendra tous les diviseurs primitifs, & de simples multiplications feront trouver les composez.

4° Il peut arriver que l'origine soit non seule-

ment une lettre ſimple, mais même de deux ou pluſieurs lettres.

5° Mais quelle que ſoit l'origine, nous rendrons les transformations faciles, en la ſuppoſant égale à l'unité.

6° Cette ſorte de transformation étant faite, nous prendrons une nouvelle origine, pour faire la diviſion, & quand il le faudra, nous réïtererons les tranformations.

7° Pour éviter les erreurs de calcul, aprés avoir trouvé un diviſeur ſimple, on pourra par luy diviſer la propoſée, & operer ſur le quotient, en ſuivant la même methode, pour trouver les autres diviſeurs ſimples.

EXEMPLE PREMIER.

Trouver les diviſeurs de la quantieé A.

8° Il étoit arbitraire de prendre pour origine celle qu'on auroit voulu des lettres a, b, c, d, e, f, g, h, k. Nous aurons choiſi a.

9° Propoſée A,

$$\begin{array}{llll} hea & +heb & -hgb & -kfb \\ +hfa & +hec & -hgc & -kfc \\ -hga & +hed & -hgd & -kfd \\ -kea & +hfh & -keb & +kgb \\ -kfa & +hfc & -kec & +kgc \\ +kga & +hfd & -ked & +kgd \end{array}$$

10° Effaçons a, c'eſt-à-dire ſuppoſons $a \ddagger 1$, & prenons e pour origine. Nous aurons pour diviſeur B & pour dividende C, celuy-cy ſecond terme de A, celuy-là premier.

Diviſeur B.

$$\begin{array}{l} he + hf \\ -ke - hg \\ \quad - kf \\ \quad + kg \end{array}$$

Dividende C.

$$\begin{array}{llll} & hbe & + hfb & + kgb \\ + & hce & + hfc & + kgc \\ + & hde & + hfd & + kgd \\ - & kbe & - kfb & - hgb \\ - & kce & - kfc & - hgc \\ - & kde & - kfd & - hgd \end{array}$$

11° Quotient L.

$$b + c + d$$

12° Reſte 0.

13° Pour diviſer le ſecond terme de B par le premier, ſoit l'origine $e \supset 1$, & que la nouvelle origine ſoit h.

Diviſeur D.

$$h - k$$

Dividende E.

$$\begin{array}{l} fh - kf \\ -gh + kg. \end{array}$$

14° Quotient M.

$f - g$.

15° Reſte 0.

16° Comme les deux termes de D. n'ont aucune meſure commune plus grande que l'unité, on ne pouſſe pas plus loin les diviſions.

Concluſion.

17° Puiſque B ſe meſure ſoy-même par l'nnité ; ſi au lieu de cette unité nous remettons a, nous comprendrons que B meſure C, c'eſt-à-dire le ſecond terme de A, par a. Or B meſure C, c'eſt-à-dire le ſecond terme de A, par le quotient L. Donc B meſure la ſomme des deux termes de A, c'eſt-à-dire la quantité propoſée A, par $a + L$ ↄ $a + b + c + d$.

18° Par un ſemblable raiſonnement on prouvera que $h - K$ meſure B par $e + f - g$,

19° Et comme tout-à-l'heure B meſuroit A, il s'enſuit que $h - K$ meſure auſſi A.

20° Ainſi nous avons déja deux diviſeurs de A, l'un B, l'autre $h - K$.

21° D'ailleurs comme B meſure A par $a + b + e + d$, il s'enſuit que reciproquement $a + b + c + d$ meſure A par B, & eſt par conſequant un des diviſeurs de A.

22° Enfin comme $h - K$ meſure B par $e + f - g$, & que cela montre que reciproquement $e + f - g$ meſure B par $h - K$; il faut reconnoître que $e + f - g$ eſt un des diviſeurs de A ; puiſque A eſt meſuré par B.

23° Les diviſeurs trouvez ſont donc le premier, $a + b + c + d$; le ſecond $h - K$; le troiſiéme, B; le quatriéme, $e + f - g$.

24° Comme B a été découvert compoſé par la multiplication de $e + f - g$ par $h - K$, les diviſeurs ſimples trouvez ſont ſeulement $a + b + c + d$, $h - K$, $e + f - g$.

SECOND EXEMPLE.

25° Nous avons écrit la propoſée A, ſelon l'origine np, & cela nous étoit permis, parce que dans A il ne ſe trouve ni n ni p, ſans qu'il y ait np.

Propoſée A.

$$abcnp + abcgh + afmnp - cbdgh - cbdnp + afghm.$$

26° Soit l'origine $np > 1$, & que pour diviſer le ſecond terme de A, par le premier, l'on prenne m pour lettre principale.

Diviſeur B.

$$afm + abc - cbd$$

Dividende C.

$$afghm + abcgh - cbdgh$$

27° Quotient D.

27° Quotient D.
gh

28° Comme B meſure le premier terme de A par np, nous avons la ſomme $np + gh$, pour l'un des diviſeurs ou produiſans de A;

29° Et ſi par ce produiſant $np + gh$ nous diviſons la propoſée A; le quotient $abc + afm - cbd$ ſera l'autre produiſant de la quantité A.

30° La priſe de np pour origine a rendu le calcul facile. Voyons ce qui arrivera en écrivant la propoſée, aprés avoir pris c pour origine.

31° Propoſée A.

$$\begin{array}{l} npabc + afmnp \\ - npbdc + afghm \\ - bdghc \\ + abghc \end{array}$$

32° Pour diviſer le ſecond terme par le premier, ſoit c) 1 & a lettre principale.

Diviſeur E.

33° $npba - npbd$
$+ bgha - bdgh$

Dividende F.

$$\begin{array}{l} fmnpa \\ + fghma \end{array}$$

34° Chacun des termes du diviſeur E & du dividende F a pour meſure $np + gh$, c'eſt pourquoy

A, qui eſt la quantité propoſée, & fait la même choſe que $E + F$, a auſſi pour diviſeur exact $np + gh$, & il n'y a aucune difficulté à trouver l'autre, comme on a fait au vingt-neuviéme numero.

PROBLEME XX.

Trouver les diviſeurs d'une quantité litterale, qui contient une, deux ou pluſieurs lettres; leſquelles montent juſques au deuxiéme degré, ſans qu'aucune de ſes lettres monte plus haut.

1° L'On feindra que la quantité propoſée égale theta.

2° On l'écrira aprés avoir pris pour origine une lettre qui ne monte pas moins haut que le deuxiéme degré.

3° L'équation étant ainſi écrite, il ſera facile de trouver une des deux valeurs de la lettre principale ou origine.

4° De la lettre principale retranchant ſa valeur trouvée, le reſte ſera l'un des diviſeurs cherchez, & par la diviſion l'on trouvera l'autre.

5° Au reſte dans toutes ces ſortes de queſtions, de quelque degré qu'elles ſoient, on ne doit jamais negliger de chercher la quantité qui peut meſurer chaque terme de la propoſée, que l'on doit rabaiſſer, en faiſant la diviſion par cette commune meſure qui doit être conſervée comme un des diviſeurs cherchez, quand elle contient quelque lettre ou nombre plus grand que l'unité.

EXEMPLE.

6° Pour trouver les diviſeurs de la quantité *M*, laquelle nous avons écrite ſelon l'origine *z*.

7° Aprés avoir diviſé chacun de ſes termes par *b*, il vient *N*.

Quantité propoſée *M*.

8° $bbccz^3 + abbcdz + aabbcd \mathrel{)\!\!(} 0$
$- bcmgfz^2 - aabbcc$
$+ bcmgfaz$
$- abfgmdz$

0.

9° Quantité *M* rabaiſſée par le moyen du diviſeur *b*.

N. $bccz^3 + abcdz + aabcd \mathrel{)\!\!(} 0$.
$- cmgfz^2 - aabcc$
$+ cmgfaz$
$- afgmdz$

10° D'abord il vient $z^2 \mathrel{)\!\!(} 0$
$cmgfz + bccaa$
$- abcdz - aabcd$
$- cmgfa$
$+ afgmd$

bcc

11° L'extraction fournit $z \mathrel{)\!\!(} 0$
$cmgf + \sqrt{\ }$
$- abcd -$
$ccmmggfff$
$+ aabbccdd$
$+ 2abccdmgf$
$+ 4aac^4bb$
$- 4abc^3mgf$
$- 4aabbc^3d$

$2bcc$

12° L'on voit d'abord que par c on peut diviſer le numerateur & le dominateur du onziéme numero ; ce qui rend $z \propto$

$$\begin{array}{ll} mgf + & \propto mmggff \\ -abd- & +aabbdd \\ & +2abdmgf \\ & +4aaccbb \\ & -4abcmgf \\ & -4aabbcd \end{array}$$

13° La racine de ce qui eſt ſous le ſigne radical fait $mgf + abd - 2abc$.

14° Ainſi la grande valeur de z eſt

$$z \propto \frac{mgf - abc}{bc};$$

14° De ſorte que $bcz - mgf + abc \propto 0$.

15° Nous avons donc $bcz - mgf + abc$ pour l'un des deux diviſeurs de la quantité N.

16° Si par $bcz - mgf + abc$ nous diviſons N, il viendra au quotient $cz + ad - ac$.

17° C'eſt pourquoy les produiſans de la quantité propoſée M ſont, le premier, b; le ſecond, $bcz - mgf + abc$; le troiſiéme $cz + ad - ac$.

18° Autrement pour reſoudre N.

19° Comme dans la quantité N la lettre a monte à un auſſi haut degré, qui eſt icy le deuxiéme, qu'aucune autre, cherchons la valeur de a. $aa \propto$

$$\begin{array}{l} fgmda + cmgfz \\ - cmgfa - bcczz \\ - bcdza \end{array}$$

$$bcd - bcc$$

210 L'extraction fournit $a \gtrless \frac{fgmd - bczd}{-cfgm + bccz}$

$$bcd - bcc$$

220 La plus grande commune meſure des deux termes de cette fraction eſt $d - c$; par $d - c$ diviſant ces deux termes, c'eſt-à-dire le numerateur & le dénominateur, il vient

230 $a \gtrless \frac{fgm - bcz}{bc}$

240 Ainſi $abc - fgm + bcz \gtrless 0$,

250 Et cette quantité doit être un des produiſans de N, comme au quatorziéme numero ; de ſorte qu'à preſent nous finirons comme il eſt marqué aux quinziéme, ſeiziéme & dix-ſeptiéme numero.

260 L'on peut auſſi reſoudre l'équation N, en cherchant la valeur de c ; puiſque dans cette équation, c ne ſe trouve pas moins élevée que z & a.

COROLLAIRE.

Il eſt clair, que par cette propoſition l'on peut trouver la plus grande commune meſure de deux quantitez litterales, où il ſe trouve une lettre commune qui monte juſques au deuxiéme degré, & aucune qui monte plus haut.

DU PARTAGE D'AUTANT de quarrez parfaits donnez que l'on voudra en d'autres quarrez parfaits qui ſoient entre les limites preſcrites, à condition que le nombre des quarrez que l'on cherche ne ſoit pas moindre que celuy des donnez.

PREMIERE PROPOSITION.

Partager le quarré parfait a a *en deux quarrez parfaits* z z *&* y y, *de ſorte que le côté* z *ſurpaſſe* g *& ſoit au deſſous de* h ; *ce qui demande manifeſtement que* g *ſoit moindre que* h, *& permet de ſuppoſer que la limite* h *n'excede pas* a.

EXPRESSION ABREGE'E.

Trouver z *&* y.

1° SUppoſant $g] h$, $h \supset] a$, $z [g, z] h$.
2° $zz + yy \supset aa$.

Calcul.

3° Soit $z \supset vx - a$ & $y \supset tx$.

4° Les troiſiéme & deuxiéme numero fourniront

$$vvxx - 2avx + ttxx \gtrless \theta.$$

5° Ainſi (diviſant par x) $vvx - 2av + ttx \gtrless \theta$.

6° D'où il s'enſuit que $vvx + ttx \gtrless 2av$.

7° Cecy rend $x \gtrless \frac{2av}{vv + tt}$.

8° Les troiſiéme & ſeptiéme numero rendent

$$z \gtrless \frac{avv - att}{vv + tt}.$$

9° Les mêmes troiſiéme & ſeptiéme rendent y

$$\gtrless \frac{2atv}{vv + tt}.$$

10° z [g demande (ſelon le huitiéme)

$$vv \left[\frac{att + gtt}{a - g} \right.$$

11° L'extraction fournit v [$t \sqrt{\frac{aa - gg}{a - g}}$

12° z] h demande ſelon le même huitiéme numero

$$vv \left] \frac{att + htt}{a - h} \right.$$

13° L'extraction fournit v] $t \sqrt{\frac{aa - hh}{a - h}}$

14° Quand h égale a, le treiziéme numero eſt ſuperflu, parce que, mettant a pour h, le huitiéme ſignifie, conformément à la ſuppoſition z] h, que la

la quantité negative $-2att$ eſt moindre que rien, ce qui ne ſauroit manquer.

Reſolution & détermination.

v & t arbitraires, g] h, h)] a.

$$110\ v\ [\ \frac{t\sqrt{aa-gg}}{2ava-g}\ 3^{e}\ v\ ]\ \frac{t\sqrt{aa-hh}}{a-h}$$

$$70\ x\ )\ \frac{2ava-g}{vv+tt}\ 3^{e}\ \&\ 8^{e},\ z\ )\ vx-a$$

$$)\ \frac{avv-att}{vv+tt}.\ 3^{e}\ \&\ 9^{e},\ y\ )\ tx\ )\ \frac{2atv}{vv+tt}$$

NOMBRES.

Pour partager le quarré parfait aa) 121, dont le côté a fait 11, en deux quarrez parfaits zz & yy, de ſorte que les limites données étant g) 3 & h) 7, le côté z tombe entre g & h, c'eſt-à-dire entre 3 & 7; prenons, ſi l'on veut t) 10.

Ainſi v ſera plus grand $13\frac{3}{5}$ & au deſſous de $21\frac{3}{5}$. Soit v) 20. Il viendra x) $\frac{22}{25}$, & les deux côtez cherchez ſeront, l'un z) $\frac{33}{5}$, & l'autre y) $\frac{44}{5}$.

Examen. $zz+yy\ )\ \frac{1089+1936}{25}\ )\ 121$

) aa & z eſt entre 3 & 7, entre g & h.

Partager la ſomme $aa + bb$ *de deux quarrez parfaits donnez* aa *&* bb, *dont le premier* aa *ne ſoit pas moindre que le ſecond* bb, *en deux autres quarrez parfaits* zz *&* yy, *de ſorte que* z *tombe entre la moindre limite donnée* g *& la plus grande* h, *laquelle nous ſuppoſerons n'exceder pas le côté* a.

ÉXPRESSION ABREGÉE.

Trouver z *&* y.

1° SUppoſant $g \rceil h$, $h \rangle\!\rangle \rceil a, a [\rangle\!\rangle b, z [g; z \rceil h$.

2° $zz + yy \rangle\!\rangle aa + bb$.

Calcul.

3° Soit $z \rangle\!\rangle a - vx$ & $y \rangle\!\rangle tx - b$.

4° La ſubſtitution du troiſiéme numero dans le deuxiéme fera trouver les trois ſuivans;

5° $x \rangle\!\rangle \dfrac{2av + 2bt}{vv + tt}$; &c, $z \rangle\!\rangle \dfrac{att - 2btv - avv}{vv + tt}$

7° $y \rangle\!\rangle \dfrac{btt + 2atv - bvv}{vv + tt}$,

8° z [g demande, ſelon le ſixiéme,

$$v \rceil \frac{-bt + t\sqrt{aa + bb - gg}}{a + g}.$$

9° z] b demande, ſelon le même ſixiéme numero.

$$v\ [\ \frac{-bt+t\sqrt{aa+bb}-bb}{a+b}.$$

10° y [θ demande, ſelon le ſeptiéme numero.

$$v\ ]\ \frac{at+t\sqrt{aa+bb}}{b}$$

11° Le huitiéme numero rend le dixiéme ſuperflu ; puiſque le numerateur de celuy-cy ſurpaſſe viſiblement le numerateur de celuy-là, & que le dénominateur du huitiéme eſt ſans doute plus grand que celuy du dixiéme.

12° Le neuviéme eſt ſuperflu, quand $b \gtrless a$; parce qu'alors ſon numerateur fait θ.

Reſolution & détermination.

v & t arbitraires, a [$\gtrless b, g$] b, $b \gtrless$] a.

$$8°\ v\ ]\ \frac{-bt+t\sqrt{aa+bb-gg}}{a+g}.$$

$$9°\ v\ [\ \frac{-bt+t\sqrt{aa+bb-bb}}{a+b}$$

$$5°\ x \gtrless \frac{2av+2bt}{vv+tt}.$$

$$6°\ z \gtrless a-vx \gtrless \frac{att-2btv-avv}{vv+tt}.$$

$$7°\ y \gtrless tx-b \gtrless \frac{btt+2att-bvv}{vv+tt}$$

NOMBRES. PREMIER EXEMPLE.

Pour partager la somme $aa + bb \gg 464$ des deux quarrez parfaits, l'un $aa \gg 400$, & l'autre $bb \gg 64$ dont les côtez sont $a \gg 20$ & $b \gg 8$, en deux autres quarrez parfaits zz & yy; de sorte que les limites données étant $g \gg 16$ & $h \gg 20$, le côté z tombe entre g & h, c'est-à-dire entre 16 & 20; soit $t \gg 40$. Il viendra, en entiers, v] 8 avec v [9. Prenons $v \gg 2$ Nous trouverons $x \gg \frac{120}{401}$, $z \gg \frac{7660}{401}$, $y \gg \frac{7002}{401}$.

Examen. $zz + yy \gg \frac{58675600 + 15936064}{160801}$

$\gg 464$, & z est entre 16 & 20, entre g & h.

DEUXIE'ME EXEMPLE.

Ayant comme aupaparavant $a \gg 20$, $b \gg 8$, & $g \gg 16$, que la grande limite h fasse le nombre 18; si nous prenons $t \gg 40$, nous trouverons v] 8 avec v [4, en entiers. Soit $v \gg 6$. De cette façon $x \gg \frac{220}{409}$, $z \gg \frac{6760}{409}$, & $y \gg \frac{5525}{409}$.

Examen $zz + yy \gg \frac{47059600 + 30558784}{167281}$

$\gg 464 \gg aa + bb$, & z est entre 16 & 18, entre g & h.

TROISIE'ME EXEMPLE.

Soient maintenant $a \gg 20$, $b \gg 20$, $g \gg 16$, $h \gg 20$, & que l'on prenne $t \gg 40$. Il

en reſultera, en entiers, v] 4 avec v [θ. Soit $v \gtrdot 2$. Il viendra $x \gtrdot \frac{4}{4 \cdot 1}$, $z \gtrdot \frac{7}{401}^{0}$, $y \gtrdot \frac{8740}{401}^{0}$

Examen. $zz + yy \gtrdot \frac{51552400 + 77088400}{160801}$

$\gtrdot 800 \gtrdot aa + bb$, & z eſt entre 16 & 20, entre g & h.

Quatriéme Exemple.

Pour dernier exemple, ſoient les côtez donnez $a \gtrdot 20$ & $b \gtrdot 20$ & les limites entre leſquelles z doit tomber, l'une $g \gtrdot 16$, l'autre $h \gtrdot 18$. Si l'on prend $t \gtrdot 40$, il viendra, en entiers, v] 4 avec v [1. Soit $v \gtrdot 2$. L'on trouvera $x \gtrdot \frac{430}{401}$, $z \gtrdot \frac{7}{401}^{0}$, $y \gtrdot \frac{8760}{401}$.

Examen. $zz + yy \gtrdot \frac{51552400 + 77088400}{160801}$

$\gtrdot 800 \gtrdot aa + bb$, & z eſt entre 16 & 18. entre g & h.

Remarque. Au troiſiéme exemple les limites permettoient de prendre $v \gtrdot 1$, ce qui auroit fait trouver z entre les limites $g \gtrdot 16$ & $h \gtrdot 20$; au lieu que dans celuy-cy l'a priſe de $v \gtrdot 1$ n'auroit pas réüſſi, pour faire tomber z entre les limites $g \gtrdot 16$ & $h \gtrdot 18$.

TROISIE'ME PROPOSITION.

Partager la ſomme aa + bb *de deux quarrez parfaits donnez* aa *&* bb, *dont le premier* aa *ne ſoit pas moindre que le ſecond* bb, *en deux autres quarrez parfaits* zz *&* yy ; *de ſorte que* z *tombe entre la moindre limite* g, *que nous ſuppoſerons égale au côté* a, *&la plus grande* h, *dont nous ſuppoſerons le quarré moindre que la ſomme des deux quarrez parfaits donnez.*

EXPRESSION ABREGE'E.

Trouver z *&* y.

1° Supposant $a[\ )\!\!)\ b$, $g\ )\!\!)\ a$, $a]\ h$, $h]\ \sqrt{aa + bb}$, $z[\ g$, $z]\ h$,

2° $zz + yy\ )\!\!)\ aa + bb$

Calcul.

3° ſoit $z\ )\!\!)\ vx - a$ & $v\ )\!\!)\ b - tx$.

4° La ſubſtitution du troiſiéme numero dans le deuxiéme fera trouver les trois ſuivans.

5° $x\ )\!\!)\ \dfrac{2av + 2bt}{vv + tt}$; 6, $z\ )\!\!)\ \dfrac{avv + 2btv - att}{vv + tt}$;

7° $y\ )\!\!)\ \dfrac{bvv - 2atv - btt}{vv + tt}$.

8o Puiſque $g \gtrless a$, au lieu de ſubſtituer $z \lceil g$, dans le ſixiéme numero, nous y ſubſtituerons $z \lceil a$, ce qui rendra $v \lceil \frac{at}{b}$.

9o $z \rceil b$ demande, ſelon le ſixiéme, $vv \lceil \frac{2btv - att - htt}{b - a}$.

10o L'extraction fournit $v \lceil \frac{bt + t\sqrt{aa + bb - hh}}{b - a}$ ſi l'on veut,

11o Ou, ſi on l'aime mieux, $v \rceil \frac{bt - t\sqrt{aa + bb - hh}}{b - a}$.

12o Ayant marqué que le conſequent du dixiéme numero ſurpaſſe celuy du huitiéme, il en reſultera facilement que ah eſt $\rceil aa + bb + b\sqrt{aa + bb - hh}$; ce qui ne ſçauroit manquer, puiſque ab eſt même moindre $aa + bb$. En effet on a ſuppoſé $h \rceil \sqrt{aa + bb}$, ce qui eſt le même que $hh \rceil aa + bb$ avec $a \rceil b$, d'où l'on tire $ah \rceil hh$ & à plus forte raiſon $ah \rceil aa + bb$. Ainſi le conſequent du dixiéme numero ſurpaſſant celuy du huitiéme, la limite $v \lceil \frac{at}{b}$ doit être negligée comme ſuperfluë, quand on veut employer le dixiéme, & non pas l'onziéme.

13o Le huitiéme ſignifie $v \lceil t$, lorſque $a \gtrless b$.

14o Si l'on employe le onziéme, & non pas le dixiéme, on obſervera le huitiéme.

15o De cette maniere, au lieu du ſeptiéme on

écrira $y \gtrless tx - b \gtrless \frac{btt + 2atv - bvv}{vv + tt}$.

16° Quand on exployera le dixiéme, on aura toûjours y [θ ſelon le ſeptiéme, ſans avoir beſoin de limiter pour celuy-cy.

17° En effet y [∂, ſelon le ſeptiéme, fait trouver

$$v \left[\frac{at + t\sqrt{aa + bb}}{b} ; \frac{at + \sqrt{aa + bb}}{b} \right.$$

18° On conviendra que le conſequent $\frac{bt + t\sqrt{aa + bb} - hh}{h - a}$ eſt moindre que ;

19° Puiſque le dix-huitiéme fournit $ah + h\sqrt{aa + bb}\,]\,aa + bb + a\sqrt{aa + bb} + b\sqrt{aa + bb} - hh$, où l'on void que ah eſt] $a\sqrt{aa + bb}$, à cauſe de h] $\sqrt{aa + bb}$, & que par la même raiſon $b\sqrt{aa + bb}$ eſt moindre que $aa + bb$, de ſorte que le ſeiziéme eſt veritable.

20° Si l'on employe le onziéme, & non pas dixiéme, il faudra de plus au lieu du ſeptiéme ſe ſervir du quinziéme, comme l'on fera voir.

21° Celuy-cy rendra y [θ, ſi v] $\frac{at + t\sqrt{aa + bb}}{b}$;

22° Ce qui s'accorde avec le huitiéme numero & eſt rendu ſuperflu par le onziéme.

23° L'on peut rendre z moindre que h, par le onziéme numero, comme nous avons vû.

24° Pour

240 Pour ſavoir ſi l'on doit prendre y ſelon le ſeptiéme numero, ou ſelon le quinziéme, quand on employe le onziéme ; nous remarquerons que ſelon le quinziéme, la valeur de y demande pour limite le vingt & uniéme, qui ne ſauroit manquer de s'accorder avec l'onziéme, puiſque celuy-cy rend le vingt & uniéme ſuperflu.

250 L'accord des onziéme & huitiéme demande $b \gamma aa + bb - hh] aa + bb - ah$ (chaque membre $[\theta$, à cauſe de $hh] aa + bb$ & de $h [a$) de ſorte que (quarrant & tranſpoſant) $2a^3h + 2abbh] aabb + bbhh + a^4 + aahh$; d'où la diviſion par $aa + bb$ tire $2ah] aa + hh$ Ainſi $hh [2ah - aa$, & (par extraction) $h [a$, comme on a ſuppoſé, de ſorte que les huitiéme & onziéme s'accordent.

Ce raiſonnement ſe peut tourner d'une autre façon. Premierement les numerateur & dénominateur du onziéme ſeront chacun poſitifs, ſi $h [a$. Secondement la comparaiſon des onziéme & huitiéme demande $b \gamma aa + bb - hh] aa + bb$. Troiſiémement (ſi nous multiplions quarrément) $aabb + b^4 - hhbb] a^4 + 2bbaa + b^4$. Quatriémement (par tranſpoſition) $aabb + b^4] a^4 + 2bbaa + b^4 + hhbb$, ce qui eſt le même que $\theta] a^4 + aabb + hh bb$, & ne ſauroit manquer.

Premiere reſolution & détermination.

v & t arbitraires ; $a [\supset b$; $g \supset a$; $b] a$

$b] \gamma\, aa + bb.$

100 $v [\dfrac{bt + t \gamma\, aa + bb - hh}{h - a}.$

50 $x \gtrless \dfrac{2av + 2bt}{vv + tt}.$

60 $z \gtrless vx - a \gtrless \dfrac{avv + 2btv - att}{vv + tt}.$

70 $y \gtrless b - tx \gtrless \dfrac{bvv - 2atv - btt}{vv + tt}.$

Deuxiéme résolution & détermination.

v & t arbitraires ; $a [\gtrless b$; $g \gtrless a$; $b [a$; $b] \gamma\, aa + bb.$

80 $v [\dfrac{at}{b}$, onziéme, $v] \dfrac{bt - t \gamma\, aa + bb - hh}{h - a}$;

50 $x \gtrless \dfrac{2av + 2bt}{vv + tt}$; 60, $z \gtrless vx - a \gtrless$

$avv + \dfrac{avv + 2btv - att}{vv + tt}$;

150 $y \gtrless tx - bx \dfrac{btt + 2atv - bvv}{vv + tt}.$

Nombres pour la premiere reſolution.

PREMIER EXEMPLE.

Pour partager la ſomme $aa + bb \supset 800$ des deux quarrez parfaits, l'un $aa \supset 400$ & l'autre $bb \supset 400$, dont les côtez ſont $a \supset 20$, & $b \supset 20$, en deux autres quarrez parfaits zz & yy, de ſorte que les limites données étant, l'une $g \supset 20$ & l'autre h (entre 20 & $\curlyvee$ 800) $\supset 28$, le côté z ſurpaſſe g & ſoit au deſſous de h, c'eſt-à-dire entre 20 & 28 ; ſoit $t \supset 10$. On trouvera que v doit ſurpaſſer 30. Soit $v \supset 40$. De cette façon $x \supset \frac{20}{17}$, $z \frac{460}{17}$, $y \supset \frac{180}{17}$ Examen $zz + yy \supset \frac{211600 + 19600}{289}$ $\supset 800 \supset aa + bb$, & z eſt entre 20 & 28, entre g & h.

Deuxiéme exemple pour la premiere reſolution.

Soient maintenant $a \supset 20$, $b \supset 8$, $g \supset 20$, $h \supset 21$ (entre 20 & $\curlyvee$ 464, c'eſt-à-dire h [g avec h] $\curlyvee aa + bb$.) & que l'on prenne $t \supset 40$. Il viendra v [511 en entiers. Si l'on prend $v \supset 600$; on trouvera $x \supset 1\frac{77}{110}$, $z \supset 2\frac{360}{113}$, $y \supset \frac{195}{113}$.

Examen. $zz + yy \supset \frac{5369600 + 355216}{12769}$ $\supset 464 \supset aa + bb$ & z eſt entre 20 & 21, entre g & h.

Nombres pour la deuxiéme resolution.

PREMIER EXEMPLE.

Ayant comme au premier exemple de la premiere resolution, $a \propto 20$, $b \propto 20$, $g \propto 20$, $h \propto 28$ avec l'arbitraire $t \propto 10$, il vient v [10 & v] 20, & prenant $v \propto 15$, on trouve $x \propto \frac{20}{13}$, $z \propto \frac{260}{13}$, $y \propto \frac{120}{13}$.

Examen. $zz + yy \propto \frac{115600 + 19600}{169}$

$\propto 800 \propto aa + bb$, & z est entre 20 & 28, entre g & h.

Deuxiéme exemple pour la deuxiéme resolution.

Soient, comme au deuxiéme exemple de la resolution premiere, $a \propto 20$, $b \propto 8$, $g \propto 20$, $h \propto 21$, $t \propto 40$. Il viendra v [100 exactement, avec v] 129 en entiers, & si l'on prend $v \propto 120$, les valeurs de x, z & y seront, $x \propto \frac{8}{50}$, $z \propto \frac{104}{5}$, $y \propto \frac{28}{5}$.

Examen. $zz + yy \propto \frac{10816 + 784}{25} \propto 464$

$\propto aa + bb$, & z est entre 20 & 21, entre g & h.

Remarque.

Ainsi nous avons deux resolutions differentes, & le calcul par nombres sera considerablement abregé, si nous conservons les chiffres qui auront

été employez pour le dixiéme numero, ce qui rendra l'uſage du onziéme tres-facile.

QUATRIE'ME PROPOSITION.

Partager la ſomme a a + b b *de deux quarrez parfaits donnez* a a *&* b b, *dont le premier* a a *égale le ſecond* b b, *en deux autres quarrez parfaits* z z *&* y y ; *de ſorte que* z *tombe entre la moindre limite* g, *que nous ſuppoſerons plus grande que le coté* a, *&* *la plus grande* h *dont le quarré ſoit moindre que la ſomme des deux quarrez parfaits donnez.*

EXPRESSION ABREGE'E.

Trouver z *&* y.

1° SUppoſant $a \gtrless b$, $g\,[\,a, g\,]\,h, h\,]\,\gamma$ $aa + bb$, qui eſt le même que $hh\,]\,2aa$, à cauſe de $a \gtrless b$. $z\,[\,g, z\,]\,h$,

2°. $zz + yy \gtrless aa + bb$, que nous écrirons $z\zeta + yy \gtrless 2aa$, parce que a égale b.

Calcul.

3° Soient $z \gtrless vx - a$ & $y \gtrless a - tx$.

4° La ſubſtitution du troiſiéme numero dans le deuxiéme fait trouver les trois ſuivans.

5° $x \gtrless \dfrac{2avt + 2at}{vv + tt}$. 6, $z \gtrless \dfrac{avv + 2atv - att}{vv + tt}$

$$7^{o}\ y \propto \frac{avv - 2atv - att}{vv + tt}.$$

$$8^{o}\ z \left[g \text{ demande (selon le sixiéme) } vv \right] \frac{2atv - att - gtt}{g - a}.$$

$$9^{o}\ \text{Ainsi (par extraction) } v \left] \frac{at + t\sqrt{2aa - gg}}{g - a}, \right.$$

$$10^{o}\ \text{avec } v \left[\frac{at - t\sqrt{2aa - gg}}{g - a}; \right.$$

ce numero icy & le neuviéme devant être obſervez tous deux enſemble.

$$11^{o}\ z \left] h \text{ demande (selon le sixiéme) } vv \right[\frac{2atv - att - htt}{h - a}.$$

$$12^{o}\ \text{Ainsi (par extraction) } v \left[\frac{at + t\sqrt{2aa - hh}}{h - a}, \right.$$

ſi l'on veut.

$$13^{o}\ \text{ou (ſi on l'aime mieux) } v \left] \frac{at - t\sqrt{2aa - hh}}{h - a}. \right.$$

14° Si l'on ſuit le douziéme, & non pas le treziéme, le dixiéme ſera ſuperflu, & les neuviéme & douziéme détermineront, à l'égard de ce qu'il faut pour z. Si l'on ſuit le treiziéme, & non pas le douziéme, le neuviéme ſera ſuperflu, & les dixiéme & treiziéme détermineront, à l'égard de ce qu'il faut pour z.

15o y surpasse θ selon le septiéme numero, quand v [$t + t \Upsilon 2$.

16o On prouvera que cette limite est superfluë, en faisant voir que le consequent du douziéme surpasse $t + t \Upsilon 2$.

17o Ceci ne sauroit manquer, puisqu'il en resulte d'abord $2aa + a \Upsilon 2 + \Upsilon 2aa - hh$ [$h + h \Upsilon 2$, & que la seule quantité $2a + a \Upsilon 2$ [$h + h \Upsilon 2$, comme on le peut voir en divisant par $1 + \Upsilon 2$, puisque la division fournit $a \Upsilon 2$ [h, ce qui, si l'on quarre, signifie $2aa$ [hh, comme on a supposé.

18o Par un raisonnement pareil l'on prouvera que le douziéme numero rend le dixiéme superflu, comme nous avons dit. En effet nous savons déja que le consequent du douziéme supasse $t + t \Upsilon 2$.

19o Ecrivons presentement que le consequent du dixiéme est moindre que $t + t \Upsilon 2$. La division par t fournira sans peine $\frac{a - \Upsilon 2aa - gg}{g - a}$] $1 + \Upsilon 2$. Ainsi $2a + a \Upsilon 2$ [$\Upsilon 2aa - gg + g$. L'on ne sauroit nier, que le nombre $2a$ ne soit plus grand que le nombre g (ce qui, quarrant, signifie $4aa$ [gg) aprés la supposition de $2aa$ [hh & de h [g, & il est clair que $a \Upsilon 2$ [$\Upsilon 2aa - gg$, puisque ceci revient au même que $2aa$ [$2aa - gg$; de sorte que le dix-huitiéme numero est démontré.

20o Pour ce qui est de la superfluité du neuviéme causée par le treiziéme, elle est manifeste; parce que le numerateur du consequent du neu-

vième ſurpaſſe viſiblement le numerateur du conſequent du treiziéme, & que h [a rend manifeſtement le dénominateur de celuy-là moindre que le dénominateur de celuy-cy.

210 Si au lieu du ſeptiéme on écrit $y \propto z\,x - a \propto \frac{a\,z\,z + 2\,a\,z\,v - a\,v\,v}{v\,v + z\,z}$;

220 de cette façon y [θ demandera v] $z + z \vee 2$,

230 ce que le treiziéme rend ſuperflu.

240 En effet écrivant que le conſequent du treiziéme eſt au deſſous de celuy du vingt-deuxiéme, il en reſultera $2\,a + a \vee 2] \vee \overline{2\,a\,a - h\,h} + h + h \vee 2$

250 Ainſi (quarrant) $2\,a\,a + 2\,a\,a \vee 2] h \vee \overline{2\,a\,a - h\,h} + h \vee 4\,a\,a - 2\,h\,h + h\,h + h\,h \vee 2$.

260 Diviſant par $1 + \vee 2$, il vient $2\,a\,a] h \vee \overline{2\,a\,a - h\,h} + h\,h$, ou $2\,a\,a - h\,h] h \vee \overline{2\,a\,a - h\,h}$ l'antecedent & le conſequent étant poſitifs, parce que l'on a ſuppoſé que $2\,a\,a$ ſurpaſſe $h\,h$.

270 Diviſons par $\vee \overline{2\,a\,a - h\,h}$. Il viendra $\vee \overline{2\,a\,a - h\,h}] h$. De ſorte que (quarrant) le reſultat ſera $a\,a] h\,h$, ou $a] h$, comme demandent les ſuppoſitions g [a & g] h; ce qui prouve le numero vingt-troiſiéme, & montre que reſolvant de la ſeconde maniere, les numero dixiéme & treiziéme ſuffiſent pour limiter

Premiere resolution & détermination.

v & t arbitraires, $a \gtrless b$, g [a, g] h, h] $\gtrless \sqrt{aa + bb}$.

$$90\ v] \frac{at + t\sqrt{2aa - gg}}{g - a}.$$

$$120\ v[\frac{at + t\sqrt{2aa - hh}}{h - a}.$$

$$50\ x \gtrless \frac{2av + 2at}{vv + tt}$$

$$60\ z \gtrless vx - a \gtrless \frac{avv + 2atv - att}{vv + tt}.$$

$$70\ y \gtrless a - tx \gtrless \frac{avv - 2atv - att}{vv + tt}$$

Seconde resolution & détermination.

v & t arbitraires, $a \gtrless b$, g [a, g] h, h] $\gtrless \sqrt{aa + bb}$.

$$100\ v [\frac{at - t\sqrt{2aa - gg}}{g - a}.$$

$$130\ v] \frac{at - t\sqrt{2aa - hh}}{h - a}.$$

$$6^{o}\ z \gtrless vx - a \gtrless \frac{avv + 2atv - att}{vv + tt}.$$

$$210\ y \gtrless tx - a \gtrless \frac{att + 2atv - avv}{vv + tt}.$$

Nombres pour la premiere reſolution.

Pour partager la ſomme $aa + bb \gtrless 800$ des deux quarrez parfaits, l'un $aa \gtrless 400$ & l'autre $bb \gtrless 400$, dont les côtez ſont $a \gtrless 20$ & $b \gtrless 20$, en deux autres quarrez parfaits zz & yy, de ſorte que les limites données étant, l'une $g \gtrless 21$, & l'autre $h \gtrless 22$, le côté z ſurpaſſe g & ſoit moindre que h, c'eſt-à-dire entre 21 & 22; ſoit $t \gtrless 40$. Ainſi, en entiers, v] 15, 8 avec v [755. Prenons $v \gtrless 800$. Il viendra $x \gtrless \frac{7}{401}$, $z \gtrless \frac{1780}{401}$, $y \gtrless \frac{1120}{401}$.

$$\text{Examen } zz + yy \gtrless \frac{7708400 + 5152400}{160801}$$

$\gtrless 800 \gtrless aa + bb$, & z eſt entre 21 & 22, entre g & h

Nombres pour la ſeconde reſolution.

Ayant, comme auparavant, $a \gtrless 20$, $b \gtrless 20$, $g \gtrless 21$, $h \gtrless 22$, & $t \gtrless 40$; l'on trouvera qu'en entiers v tombe entre 42 & 45. Prenons $v \gtrless 44$. Il viendra $x \gtrless \frac{2}{221}$, $z \gtrless \frac{4620}{2212}$, $y \gtrless \frac{1920}{2212}$, & l'examen ſera

$$zz + yy \gtrless \frac{25232400 + 13840400}{48841} \gtrless 800$$

$\gtrless aa + bb$; ce qui avec z entre 20 & 21, entre g & h, montre que toutes les conditions du Probleme ſont remplies.

Remarque. Icy, comme dans la propoſition precedente, nous avons deux reſolutions differentes, & fort peu plus de calcul par nombres, que ſi nous n'en avions qu'une, pourvû, qu'en employant les neuviéme & douziéme, l'on garde tout, afin que les dixiéme & treiziéme coûtent moins de travail ; ce qui ſoit dit de toutes les propoſitions où la même choſe arrivera.

CINQUIE'ME PROPOSITION.

Partager la ſomme aa + bb *de deux quarrez parfaits donnez* aa *&* bb, *dont le premier* aa *ne ſoit pas moindre que le ſecond* bb, *en deux autres quarrez parfaits* zz *&* yy ; *de ſorte que* z *tombe entre la moindre limite* g, *que nous ſuppoſerons au deſſous du côté* a ; *& la plus grande* h, *dont le quarré ſurpaſſe* aa *&* ſoit *ſurpaſſé par* aa + bb.

EXPRESSION ABREGE'E.

Trouver z *&* y.

1° SUppoſant $a[\gtrless b, g]\ a, b[\ , h]\ \gtrless \sqrt{aa + bb}$, $z[g\ ,\ ]h$.

2° $zz + yy \gtrless aa + bb$.

3° Dans la deuxiéme propoſition, mettant a au lieu de b, c'eſt-à-dire ſuppoſant que dans ladite propoſition b égale a, l'on trouvera des valeurs de z & de y, dont la premiere ſurpaſſera g & étant au deſſous de a, ſera par conſequent beaucoup au deſſous de ce que vaut b dans cette cinquiéme propoſition où b ſurpaſſe a & il eſt clair que le neuviéme numero de la propoſition citée ſera ſuperflu, comme ſignifiant $y \mathrel{[} b$, en y mettant a au lieu de b.

4° Enſuite faiſant tomber z entre a & b, par la propoſition troiſiéme, l'on trouvera deux autres reſolutions, dont chacune rendra $z \mathrel{[} a$ (à plus forte raiſon $z \mathrel{[} g$) & $z \mathrel{]} b$.

5° Il eſt clair que la propoſition eſt reſoluë dans toute ſon étenduë; puiſque chacune des trois valeurs trouvées de z ſurpaſſe g & eſt au deſſous de b, que la ſomme $zz + yy$ égale $aa + bb$, & que l'on a le moyen d'approchre z de g ou de b autant que l'on voudra, ſelon que l'on prendra y plus ou moins grande.

6° Au reſte il eſt évident que dans ce Probleme, les lettres a & b fourniſſent une reſolution particuliere, qui eſt de prendre $z \mathrel{)\!(} a$ & $y \mathrel{)\!(} b$; puiſque de cette façon z tombe entre g & b, & que $zz + yy \mathrel{)\!(} aa + bb$.

7° Cette reſolution particuliere a neanmoins un défaut, parce que les quarrez qu'elle fournit ne ſont pas nouveaux. Pareille choſe peut arriver dans une infinité de Problemes de cette nature.

Reſolution & détermination premiere.

80 (La ſixiéme propoſition enſeignera deux autres methodes.)

v & t arbitraires. $a[\ )o\ b, g\ ]\ a, h\ [a, h]\ \sqrt{aa + bb}$.

$$v\ ] \frac{-bt + t\sqrt{aa + bb - gg}}{a + g}$$

$$x\ )o\ \frac{2av + 2bt}{vv + tt}.$$

$$z\ )o\ a - vx\ )o\ \frac{att - avv - 2btv}{vv + tt}.$$

$$y\ )o\ tx - b\ )o\ \frac{btt + 2atv - bvv}{vv + tt}.$$

De cette maniere z tombera entre g & a, & ſera beaucoup au deſſous de h.

Seconde reſolution & détermination.

Voyez le huitiéme numero.

v & t arbitraires. $a[\ )o\ b, g\ ]\ a, h\ [a, h]\ \sqrt{aa + bb}$.

$$v\ [\frac{bt + t\sqrt{aa + bb - hh}}{h - a}.$$

$$x\ )o\ \frac{2av + 2bt}{vv + tt}.$$

$$z \gtrless vx - a \gtrless \frac{avv + 2btv - att}{vv + tt}.$$

$$y \gtrless b - tx \gtrless \frac{bvv - 2atv - btt}{vv + tt}.$$

De cette maniere z tombera entre a & b, & ſera beaucoup au deſſous de g.

Troiſiéme reſolution & détermination.

Voyez le huitiéme numero.

v & t arbitraires. $a\ ] \gtrless b, g\ ] a, b\ [a, b\ ] \curlyvee$, $\sqrt{aa + bb}$.

$$v\ [\frac{at}{b}.\ v\ ] \frac{bt - t\sqrt{aa + bb - bb}}{b - a}.$$

$$x \gtrless \frac{2av + 2bt}{vv + tt}. \quad z \gtrless vx - a \gtrless$$

$$\frac{avv + 2btv - att}{vv + tt}.$$

$$y \gtrless tx - b \gtrless \frac{btt + 2atv - bvv}{vv + tt}.$$

De cette maniere z tombera encore entre a & b, & ſera derechef beaucoup au deſſus de g.

PREMIER EXEMPLE.

Nombres pour la premiere reſolution.

Pour partager la ſomme $aa + bb \gtrless 685$ de deux quarrez parfaits $aa \gtrless 361$, & $bb \gtrless 324$,

dont les côtez ſont $a \gtrless 19$ & $b \gtrless 18$, en deux autres quarrez parfaits zz & yy, de ſorte que les limites données étant, l'une $g \gtrless 17$, & l'autre $h \gtrless 20$, le côté z ſoit plus grand que g & moindre que h, c'eſt-à dire entre 17 & 20; ſoit $s \gtrless 30$. Il viendra v] $\frac{1521}{1000}$. Irenant $v \gtrless 1$, il vient $x \gtrless \frac{1601}{901}$, $z \gtrless \frac{1}{901}$ $y \gtrless \frac{1732}{901}$.

Examen. $zz + yy \gtrless \frac{2560321001 + 300051684}{811801}$

$\gtrless 685 \gtrless aa + bb$ & z eſt entre 17 & 20, entre g & h.

Nombres pour la deuxiéme reſolution.

PREMIER EXEMPLE.

Les mêmes nombres $a \gtrless 19$, $b \gtrless 18$, $g \gtrless 17$, $h \gtrless 20$, $s \gtrless 30$ rendent v [1046 en entiers, & ſi l'on preud $v \gtrless 1200$ il viendra x $\frac{778}{24015}$, $z \gtrless \frac{31821}{1601}$, $y \gtrless \frac{27.62}{1601}$, & l'examen $zx + yy \gtrless \frac{1012576041 + 743216644}{2563201}$

$\gtrless 685 \gtrless aa + bb$, & il eſt facile de verifier que la valeur de z eſt entre 17 & 20, entre g & h.

Nombres pour la troiſiéme reſolution.

PREMIER EXEMPLE.

Les mêmes nombres $a \gtrless 19$; $b \gtrless 18$, $g \gtrless 17$, $h \gtrless 20$, $s \gtrless 30$, rendent v [31 & v] 34.

en entiers, & si l'on prend $v \gtrless 33$, il viendra $x \gtrless \frac{778}{663}$, $z \gtrless \frac{4359}{221}$, $y \gtrless \frac{3802}{221}$.

Examen $zz + yy \gtrless \frac{19000881 + 14455204}{48841}$

$\gtrless 685 \gtrless aa + bb$, & z est entre 17 & 20, entre g & h.

SECOND EXEMPLE.

Nombres pour la premiere resolution.

Soient maintenant $a \gtrless 20$, $b \gtrless 20$, $g \gtrless 19$, $h \gtrless 21$, & que l'on prenne $s \gtrless 80$. Il viendra $v] \frac{1954}{1000}$, & si l'on prend l'unité pour v, il en resultera $x \gtrless \frac{3240}{6401}$, $z \gtrless \frac{124780}{6401}$, $y \gtrless \frac{131180}{6401}$.

Examen. $zz + yy \gtrless \frac{15570048400 + 17208192400}{40972801}$

$\gtrless 800 \gtrless aa + bb$, & z est entre 19 & 21, entre g & h.

Second exemple de la deuxiéme resolution.

Les mêmes nombres $a \gtrless 20$, $b \gtrless 20$ $g \gtrless 19$, $h \gtrless 21$, $s \gtrless 80$, rendent $v [3115$, en entiers,

entiers, & ſi l'on prend $v \propto 3200$, il viendra $x \propto \frac{41}{3202}$, $z \propto \frac{33580}{1601}$, $y \propto \frac{30380}{1601}$.

Examen. $zz + yy \propto \frac{1127616400 + 922944400}{2563201} \propto 800 \propto aa + bb$, & z eſt entre 19 & 21, entre g & h.

Second exemple de la troiſiéme reſolution.

Soient derechef $a \propto 20$, $b \propto 20$, $g \propto 19$, $h \propto 21$, $t \propto 80$. Il viendra v [80 exactement, avec v] 85, en entiers, & ſi l'on prend $v \propto 84$, l'on trouvera $x \propto \frac{410}{841}$, $z \propto \frac{17620}{841}$, $y \propto \frac{15980}{841}$, & l'examen ſera

$$zz + yy \propto \frac{310464400 + 255360400}{707281} \propto 800 \propto aa + bb,$$

& z eſt entre 19 & 21, entre g & h.

SIXIE'ME PROPOSITION.

Reſoudre autrement la propoſition precedente, par laquelle on cherchoit z *&* y.

1° Suppoſant $\overset{z}{a}$ [$\propto b, g$] a, b [a, h] $\sqrt{aa+bb}$, z [g, z] b

2° $zz + yy \propto aa + bb$.

3° Soit $\overline{rf - a}\,Q + \overline{b \ldots qf}\,Q \propto aa + bb$.

4° Le troiſiéme numero fera trouver les trois ſuivans.

5° $f \propto \dfrac{2ar + 2bq}{rr + qq}$; 6, $rf - a \propto \dfrac{arr + 2bqr - aqq}{rr + qq}$;

7° $b \ldots qf \propto \dfrac{brr \ldots 2aqr + bqq}{rr + qq}$.

8° $rf - a$ [h demande, ſelon le numero ſixiéme, $'qq$] $\dfrac{2brq + arr - hrr}{a + h}$;

9° d'où l'extraction tire q] $\dfrac{br + r \sqrt{aa + bb - hh}}{a + h}$,

10° avec q [$\dfrac{br - r \sqrt{aa + bb - hh}}{a + h}$.

11° Les neuviéme & dixiéme numero doivent être obſervez tous deux enſemble, parce que dans le huitiéme la quantité $arr - hrr$ eſt negative, à cauſe de h [a.

12° Ayant déterminé q par les neuviéme & dixiéme numero, l'on trouvera en nombres les côtez $rf - a$ & $b \ldots qf$, par les cinquiéme, ſixiéme & ſeptiéme, & il eſt clair que de cette

façon le côté $rf - a$ surpassera h & par conséquent g.

13° Que les valeurs découvertes de $rf - a$ & de $b \ldots qf$ se nomment, celle-là (qui est la plus grande) c, & celle-ci (qui est la moindre) d.

14° Il s'agit présentement de partager la quantité $cc + dd$ (qui égale la somme $aa + bb$) en deux quarrez parfaits zz & yy, de sorte que z tombe entre g & h; & comme le plus grand côté c (ou $rf - a$) surpasse chacune des limites g & h, par le douziéme numero, le partage se fera selon la deuxiéme proposition, mettant dans ses formules c au lieu de a, & d au lieu de b.

Resolution selon la methode premiere.

q & r arbitraires, a [$\gtrless$ b, g] a, h [a, h] $\gtrless \sqrt{aa + bb}$,

$$9° \; q \;] \; \frac{br + r\sqrt{aa + bb - hh}}{a + h}.$$

$$10° \; q \; [\; \frac{br - r\sqrt{aa + bb - hh}}{a + h}$$

$$5° \; f \gtrless \frac{2ar + 2bq}{rr + qq}; \quad 6°, \; rf - a \gtrless \frac{arr + 2bqr - aqq}{rr + qq} \gtrless c;$$

$$7^{o}\ b \ldots q\ f \gtrless \frac{b\,r\,r \ldots 2\,a\,q\,r + b\,q\,q}{r\,r + q\,q} \gtrless d.$$

14° La propoſition deuxiéme fournit ce qui ſuit, & il faut ſe ſouvenir, pour limiter commodément par nombres, que $c\,c + d\,d \gtrless a\,a + b\,b$.

v & t arbitraires. $v\,]\ \frac{-d\,t + t\,\sqrt{c\,c + d\,d - g\,g}}{c + g}$.

$$v\,[\ \frac{-d\,t + t\,\sqrt{c\,c + d\,d - h\,h}}{c + h}\ ;\ x \gtrless \frac{2\,c\,v + 2\,d\,t}{v\,v + t\,t}\ ;$$

$$z \gtrless c - v\,x \gtrless \frac{c\,t\,t - 2\,d\,t\,v - c\,v\,v}{v\,v + t\,t}\ ;$$

$$y \gtrless t\,x - d \gtrless \frac{d\,t\,t + 2\,c\,t\,v - d\,v\,v}{v\,v + t\,t}.$$

Calcul. Seconde methode.

1° Suppoſant $a\ [\gtrless b, g\ ]\ a, h\ [\ a, h\ ]\ \sqrt{a\,a + b\,b}$, $z\ [\ g, z\ ]\ h$.

2° $z\,z + y\,y \gtrless a\,a + b\,b$.

3° Tout ſe fera par la deuxiéme propoſition, dont la commodité eſt que quand le côté qu'elle exprime par $z \gtrless a - v\,x$ eſt plus grand que ϑ, l'autre côté qu'elle exprime par $y \gtrless t\,x - b$ ſurpaſſe toûjours ϑ, comme on le peut voir en comparant les huitiéme & dixiéme numero de la

propoſition citée, aprés avoir mis θ dans celuy-là au lieu de *g*.

4° Ayant donc pris $\overline{a - rf}\,\mathcal{Q} + \overline{q\,f - b}\,\mathcal{Q}$ ☍ $aa + bb$ & trouvé les trois numero ſuivans.

5° f ☍ $\frac{2ar + 2bq}{rr + qq}$, 6, $a - rf$ ☍ $\frac{aqq - 2bqr - arr}{rr + qq}$,

7° $qf - b$ ☍ $\frac{bqq + 2aqr - brr}{rr + qq}$,

8° L'on rendra $a - rf$ [θ ſelon le numero ſixiéme, par le moyen de q [$\frac{br + r\,\overline{\gamma\,aa + bb}}{a}$,

9° Et $a - rf$] $\overline{\gamma\,aa + bb - hh}$, laquelle quantité $\overline{\gamma\,aa + bb - hh}$ nous appellerons *m*.

10° Ce qui demandera qq] $\frac{2brq + arr + mrr}{a - m}$.

11° De cecy l'extraction tire q] $\frac{br + r\,\overline{\gamma\,aa + bb - mm}}{a - m}$

12° C'eſt-à-dire (à cauſe de $\overline{\gamma\,aa + bb - hh}$ ☍ m) q] $\frac{br + rh}{a - m}$.

13° Comme nôtre calcul rend $\overline{a - rf}\,\mathcal{Q} +$

$\overline{qf - b}\ Q \gtrless aa + bb$ & (par le neuviéme numero) $\overline{a - rf}\ Q]\ aa + bb - hh$,

14° Il s'enſuit que $\overline{qf - b}\ Q$ ſurpaſſe hh & que $qf - b$ ſurpaſſe h.

15° De ſorte qu'écrivant $\overline{qf - b} \gtrless c$ & $a - rf \gtrless d$, on mettra c pour a & d pour b dans la ſeconde propoſition, ce qui reſoudra le Probleme propoſé, & l'on ne devra pas craindre que le douziéme numero ſoit abſurde, comme il arriveroit, ſi ſon dénominateur étoit negatif. En effet il eſt impoſſible que $a - m$ ſoit un nombre negatif, parce que $a [\gtrless b$ avec $a]\ h$ rendent $aa + bb - hh$, c'eſt-à-dire mm, moindre que aa, de ſorte que a ſurpaſſe m.

Reſolution ſelon la ſeconde methode.

q, r arbitraires, $a [\gtrless b, g]\ a, h [a, h]\ r\ \overline{aa + bb}$.

9° $m \gtrless r\ \overline{aa + bb} - hh$, ou $mm \gtrless aa + hb - hh$.

8° $q \left[\dfrac{br + r\ \overline{aa + bb}}{a}, 12, q \right]$

$\dfrac{br + rh}{a - m}$.

5° $f \gtrless \dfrac{2ar + 2bq}{rr + qq}$. 6, $a - rf \gtrless$

$$\frac{aqq - 2bqr - arr}{rr + qq} \gtrless d.$$

$$7^{o}\ qf - b \gtrless \frac{bqq + 2aqr - brr}{rr + qq} \gtrless e.$$

Ainſi $cc + dd \gtrless aa + bb$ & c [h.

150 Enſuite v & t arbitraires. v]

$$\frac{-dt + t\sqrt{cc + dd - gg}}{c + g}.$$

$$v\ [\ \frac{-dt + t\sqrt{cc + dd - hh}}{c + h}.$$

$$x \gtrless \frac{2cv + 2dt}{vv + tt}.$$

$$z \gtrless c - vx \gtrless \frac{ctt - 2dtv - cvv}{vv + tt}.$$

$$y \gtrless tx - d \gtrless \frac{dtt + 2ctv - dvv}{vv + tt}.$$

Nombres pour la premiere reſolution.

PREMIER EXEMPLE.

Pour partager la ſomme $aa + bb \gtrless 685$ de deux quarrez parfaits $aa \gtrless 361$ & $bb \gtrless 324$, dont les côtez ſont $a \gtrless 19$ & $b \gtrless 18$, en deux autres quarrez parfaits zz & yy, de ſorte que les limites données étant, l'une $g \gtrless 17$, & l'autre $h \gtrless 20$, le côté z ſoit plus grand que g &

moindre que h, c'eſt-à-dire entre 17 & 20 ; Si l'on prend $r \gtrless 30$, il viendra $q \rceil \frac{268\ 23}{10000}$ avec $q \lceil \frac{86}{100}$. Soit $q \gtrless 20$. Il viendra $f \gtrless \frac{93}{65}$, $rf - a$ ou $c \gtrless \frac{311}{13}$, $qf - b$ ou $d \gtrless \frac{138}{13}$.

Ainſi $cc + dd \gtrless \frac{96721 + 19044}{169} \gtrless 685 \gtrless aa + bb$, & $c \lceil 20$, ce qui eſt le même que $c \lceil h$.

Soit $t \gtrless 26$. Il viendra $v \rceil \frac{58987}{10000}$, avec $v \lceil \frac{37095}{10000}$. Si l'on prend $v \gtrless \frac{13}{3}$, l'on trouvera $x \gtrless \frac{6834}{6253}$, $z \gtrless \frac{9229}{481}$, $y \gtrless \frac{8562}{481}$.

Examen. $zz + yy \gtrless \frac{85174441 + 73307844}{231361} \gtrless 685 \gtrless aa + bb$, & z eſt entre 17 & 20, entre g & h.

Second exemple de la premiere reſolution.

Soient maintenant $a \gtrless 20$, $b \gtrless 20$, $g \gtrless 19$, h, $\gtrless 21$, & que l'on prenne $r \gtrless 80$. L'on trouvera q, en entiers entre 2 & 76. Prenons $q \gtrless$

$q \gtrless 10$. Nous trouverons $f \gtrless \frac{36}{65}$, $rf - s \gtrless \frac{316}{13} \gtrless$

e, $b - qf \gtrless \frac{188}{13} \gtrless d$. Ainſi $ee + dd \gtrless$

$\frac{99856 + 35344}{169} \gtrless 800 \gtrless aa + bb$ & $c [$

21, c'eſt-à-dire $c [h$.

Si l'on veut que t faſſe 26 ; il en reſultera v $] \frac{3897}{1000}$, avec $v [\frac{2574}{1000}$. Soit $v \gtrless \frac{103}{40}$. La reſolution numerique $x \gtrless \frac{18245440}{14198717}$, $z \gtrless$

$\frac{298156036}{14198717}$, $y \gtrless \frac{269046148}{14198717}$, & il viendra pour examen zz

$+ yy \gtrless \frac{88897621803233296 + 7238582975363704}{201603564446089}$

$\gtrless 800 \gtrless aa + bb$, avec ζ entre 19 & 21, entre g & h.

Premier exemple de la ſeconde reſolution.

Ayant, comme au premier exemple de la premiere reſolution, a 19, $b \gtrless$ 18, $g \gtrless$ 17, $h \gtrless$ 20 ; & par conſequent $mm \gtrless$ 285, d'où reſulte $m \gtrless \frac{168819}{10000}$. Soit ; comme dans l'exemple cité,

SEPTIEME PROPOSITION.

Partager la ſomme aa + bb *de deux quarrez parfaits donnez* aa *&* bb, *dont le premier* aa *ne ſoit pas moindre que le ſecond* bb, *en deux autres quarrez parfaits* zz *&* yy ; *de ſorte que* z *tombe entre la moindre limite* g, *que nous ſuppoſerons plus grande que le côté* a, *& la plus grande limite* h, *dont le quarré ne ſurpaſſe* aa + bb.

EXPRESSION ABREGÉE.

1° SUppoſant $a [\mathfrak{D} b$, $g [a, g] h$, $h \mathfrak{D}] \sqrt{aa + bb}$, $z [g, \mathfrak{Z}] h$.

2° $zz + yy \mathfrak{D} aa + bb$.

Calcul.

3° Employant les formules de x, z & y comme elles ſont à la deuxiéme propoſition, l'on rendra $z [\sqrt{aa + bb - hh}$, que nous appellerons m, & enſuite $z] \sqrt{aa + bb - gg}$, que nous appellerons n.

4° La premiere de ces deux comparaiſons fournira $v] \dfrac{-bt + t\sqrt{aa + bb - mm}}{a + m}$.

5° De la ſeconde viendra $v\left[\frac{-bt+t\sqrt{aa+bb-nn}}{a+n}\right.$;

6° De ſorte que dans les numerateurs des quatriéme & cinquiéme remettant $aa+bb-hh$, au lieu de mm, & $aa+bb-gg$, au lieu de nn, il viendra les deux numeros ſuivans.

7° $v\left]\frac{-bt+th}{a+m}\right.$, 8, avec $v\left[\frac{-bt+tg}{a+n}\right.$.

9° Il eſt clair que ce calcul rend zz [$aa+bb-hh$ &] $aa+bb-gg$. Comme donc le même calcul rend $zz+yy \gtrless aa+bb$; il s'enſuit que yy eſt moindre que hh & plus grand que gg, c'eſt-à-dire y [g & y] h, nôtre formule de y ſurpaſſant θ, en conſequence de ce qui a été dit au troiſiéme numero du ſecond calcul de la propoſition precedente.

10° Prenant enfin pour la valeur de z, ce qui faiſoit celle de y au ſeptiéme numero de la deuxiéme queſtion, & pour la valeur de y, ce qui faiſoit celle de z au ſixiéme de la même queſtion; le probleme propoſé ſera reſolu.

Reſolution & détermination.

v & t arbitraires, a [$\gtrless$ b, g [a, g] h, h $\gtrless$] $\sqrt{aa+bb}$,

$m \gtrless \sqrt{aa+bb-hh}$, $n \gtrless \sqrt{aa+bb-gg}$,

$v\left]\frac{th-tb}{a+m}\right.$, $v\left[\frac{tg-tb}{a+n}\right.$,

SEPTIE'ME PROPOSITION.

Partager la ſomme aa + bb *de deux quarrez parfaits donnez* aa *&* bb, *dont le premier* aa *ne ſoit pas moindre que le ſecond* bb, *en deux autres quarrez parfaits* zz *&* yy ; *de ſorte que* z *tombe entre la moindre limite* g, *que nous ſuppoſerons plus grande que le côté* a, *& la plus grande limite* h, *dont le quarré ne ſurpaſſe* aa + bb.

EXPRESSION ABREGE'E.

1° SUppoſant $a [\supset b, g [a, g] h, h \supset] \sqrt{aa + bb}, z [g, \zeta] h.$

2° $zz + yy \supset aa + bb.$

Calcul.

3° Employant les formules de x, z & y comme elles ſont à la deuxiéme propoſition, l'on rendra $z [\sqrt{aa + bb - hh}$, que nous appellerons m, & enſuite $z] \sqrt{aa + bb - gg}$, que nous appellerons n.

4° La premiere de ces deux comparaiſons fournira $v] \dfrac{-bt + t\sqrt{aa + bb - mm}}{a + m}$.

5° De la ſeconde viendra $v\,[\,\frac{-bt+t\sqrt{aa+bb-nn}}{a+n}$;

6° De ſorte que dans les numerateurs des quatriéme & cinquiéme remettant $aa+bb-hh$, au lieu de mm, & $aa+bb-gg$, au lieu de nn, il viendra les deux numeros ſuivans.

7° $v\,]\,\frac{-bt+th}{a+m}$, 8, avec $v\,[\,\frac{-bt+tg}{a+n}$.

9° Il eſt clair que ce calcul rend $zz\,[\,aa+bb-hh$ & $]\,aa+bb-gg$. Comme donc le même calcul rend $zz+yy\,\mathrm{O}\,aa+bb$; il s'enſuit que yy eſt moindre que hh & plus grand que gg, c'eſt-à-dire $y\,[\,g$ & $y\,]\,h$, nôtre formule de y ſurpaſſant θ, en conſequence de ce qui a été dit au troiſiéme numero du ſecond calcul de la propoſition precedente.

10° Prenant enfin pour la valeur de z, ce qui faiſoit celle de y au ſeptiéme numero de la deuxiéme queſtion, & pour la valeur de y, ce qui faiſoit celle de z au ſixiéme de la même queſtion; le probleme propoſé ſera reſolu.

Reſolution & détermination.

v & t arbitraires, $a\,[\,\mathrm{O}\,b$, $g\,[\,a$, $g\,]\,h$, $h\,\mathrm{O}\,]\,\sqrt{aa+bb}$,

$m\,\mathrm{O}\,\sqrt{aa+bb-hh}$, $n\,\mathrm{O}\,\sqrt{aa+bb-gg}$,

$v\,]\,\frac{th-tb}{a+m}$, $v\,[\,\frac{tg-tb}{a+n}$,

ROPOSITION.

aa + bb *de deux quar-*
nommez a a & b b, *dont le*
ne ſoit pas moindre que le ſe-
en deux autres quarrez parfaits
y, *de ſorte que* z *tombe entre la*
e limite g, *que nous ſuppoſerons plus*
de que le côté a, *& la plus grande li-*
e h, *dont le quarré ne ſurpaſſe* a a
r b b.

EXPRESSION ABREGE'E.

1° SUppoſant $a \supset b$, $g [a, g] h$, $h \supset]$
$r\,aa + bb$, $z [g, z] h$.
2° $zz + yy \supset aa + bb$.

Calcul.

3° Employant les formules de x, z & y com-
me elles ſont à la deuxiéme propoſition, l'on ren-
dra $z [r\,aa + bb - hh$, que nous appelle-
rons m, & enſuite $z] r\,aa + bb - gg$, que
nous appellerons n.
4° La premiere de ces deux comparaiſons four-
nira $v] \frac{-bt + t\,r\,aa + bb - mm}{a + m}$.

5° De la ſeconde viendra $v\left[\frac{-bt+t\sqrt{aa+bb-nn}}{a+n}\right.$;

6° De ſorte que dans les numerateurs des quatriéme & cinquiéme remettant $aa+bb-hh$, au lieu de mm, & $aa+bb-gg$, au lieu de nn, il viendra les deux numeros ſuivans.

7° $v\left]\frac{-bt+th}{a+m}\right.$, 8, avec $v\left[\frac{-bt+tg}{a+n}\right.$.

9° Il eſt clair que ce calcul rend zz [$aa+bb-hh$ &] $aa+bb-gg$. Comme donc le même calcul rend $zz+yy$ ☽ $aa+bb$; il s'enſuit que yy eſt moindre que hh & plus grand que gg, c'eſt-à-dire y [g & y] h, nôtre formule de y ſurpaſſant θ, en conſequence de ce qui a été dit au troiſiéme numero du ſecond calcul de la propoſition precedente.

10° Prenant enfin pour la valeur de z, ce qui faiſoit celle de y au ſeptiéme numero de la deuxiéme queſtion, & pour la valeur de y, ce qui faiſoit celle de z au ſixiéme de la même queſtion; le probleme propoſé ſera reſolu.

Reſolution & détermination.

v & t arbitraires, a [☽ b, g [a, g] h, h ☽] $\sqrt{aa+bb}$,

m ☽ $\sqrt{aa+bb-hh}$, n ☽ $\sqrt{aa+bb-gg}$,

$v\left]\frac{th-tb}{a+m}\right.$, $v\left[\frac{tg-tb}{a+n}\right.$,

SEPTIE'ME PROPOSITION.

Partager la ſomme aa + bb *de deux quarrez parfaits donnez* aa *&* bb, *dont le premier* aa *ne ſoit pas moindre que le ſecond* bb, *en deux autres quarrez parfaits* zz *&* yy ; *de ſorte que* z *tombe entre la moindre limite* g, *que nous ſuppoſerons plus grande que le côté* a, *& la plus grande limite* h, *dont le quarré ne ſurpaſſe* aa + bb.

EXPRESSION ABREGE'E.

1° SUppoſant $a [\supset b, g [a, g] h, h \supset] \sqrt{aa + bb}, z [g, \zeta] h.$

2° $zz + yy \supset aa + bb.$

Calcul.

3° Employant les formules de x, z & y comme elles ſont à la deuxiéme propoſition, l'on rendra $z [\sqrt{aa + bb - hh}$, que nous appellerons m, & enſuite $z] \sqrt{aa + bb - gg}$, que nous appellerons n.

4° La premiere de ces deux comparaiſons fournira $v] \dfrac{-bt + t\sqrt{aa + bb - mm}}{a + m}$.

5° De la ſeconde viendra $v\,[\,\frac{-bt+t\sqrt{aa+bb-nn}}{a+n}$;

6° De ſorte que dans les numerateurs des quatriéme & cinquiéme remettant $aa+bb-hh$, au lieu de mm, & $aa+bb-gg$, au lieu de nn, il viendra les deux numeros ſuivans.

7° $v\,]\,\frac{-bt+th}{a+m}$, 8, avec $v\,[\,\frac{-bt+tg}{a+n}$.

9° Il eſt clair que ce calcul rend $zz\,[\,aa+bb-hh$ & $]\,aa+bb-gg$. Comme donc le même calcul rend $zz+yy\,\mathfrak{D}\,aa+bb$; il s'enſuit que yy eſt moindre que hh & plus grand que gg, c'eſt-à-dire $y\,[\,g$ & $y\,]\,h$, nôtre formule de y ſurpaſſant θ, en conſequence de ce qui a été dit au troiſiéme numero du ſecond calcul de la propoſition precedente.

10° Prenant enfin pour la valeur de z, ce qui faiſoit celle de y au ſeptiéme numero de la deuxiéme queſtion, & pour la valeur de y, ce qui faiſoit celle de z au ſixiéme de la même queſtion; le probleme propoſé ſera reſolu.

Reſolution & détermination.

v & t arbitraires, $a\,[\,\mathfrak{D}\,b$, $g\,[\,a$, $g\,]\,h$, $h\,\mathfrak{D}\,]\,\sqrt{aa+bb}$,

$m\,\mathfrak{D}\,\sqrt{aa+bb-hh}$, $n\,\mathfrak{D}\,\sqrt{aa+bb-gg}$,

$v\,]\,\frac{th-tb}{a+m}$, $v\,[\,\frac{tg-tb}{a+n}$,

$r \gtrless 30$. Nous trouverons $q \left[\frac{69746}{1000}, q \right] 538 \frac{1}{5}$, & ſi nous prenons $q \gtrless 90$, il viendra $a - rf \gtrless \frac{22}{5} \gtrless d$, $qf - b \gtrless \frac{129}{5} \gtrless c$, de ſorte que $cc + dd \gtrless \frac{16641 + 484}{25} \gtrless 685 \gtrless aa + bb$. Que t faſſe 30. Nous trouverons $v \left] \frac{108643}{10000} \right.$ avec $v \left[\frac{81759}{10000} \right.$. Si nous prenons $v \gtrless 10$; il en reſultera $x \gtrless \frac{39}{50}$, $z \gtrless 18$, $y \gtrless 19$; de ſorte que les deux quarrez donnez reviennent.

Si nous voulons que v faſſe $\frac{25}{3}$, les reſultats ſeront $x \gtrless \frac{6246}{8725}$, $z \gtrless \frac{34611}{1745}$, $y \gtrless \frac{29798}{1745}$, que l'on verifiera par l'examen $zz + yy \gtrless \frac{1197921321 + 887920804}{3045025} \gtrless 685 \gtrless aa + bb$, & z qui eſt veritablement entre 17 & 20, entre g & h.

Second exemple de la ſeconde reſolution.

Soient, comme au ſecond exemple de la ſeconde reſolution, $a \gtrless 20$, $b \gtrless 20$, $g \gtrless 19$, $h \gtrless 21$, d'où reſulte $mm \gtrless 359$, & par conſequent $m \gtrless \frac{189473}{10000}$. Prenons, comme dans l'exemple cité, $r \gtrless 80$. Nous trouverons, en entiers q [113 avec q] 3116. Que la lettre q faſſe 3000. De cette façon il viendra $f \gtrless \frac{77}{5629}$, $a - rf \gtrless \frac{106420}{5629} \gtrless d$, $qf - b \gtrless \frac{118420}{5629} \gtrless c$; de ſorte que $cc + dd \gtrless \frac{14023296400 + 11325216400}{31685641}$

Que la quantité arbitraire t faſſe 100. Il s'enſuivra que l'autre arbitraire v eſt, en entiers plus grande que 0, & moindre que b. Si l'on prend $v \gtrless 4$, il viendra $x \gtrless \frac{694730}{1761877}$, $z \gtrless \frac{34286540}{1761877}$, $y \gtrless \frac{36163540}{1761877}$, de ſorte que l'examen eſt $zz + yy \gtrless \frac{1175566825171600 + 1307801625331600}{3107210563129}$

$\gtrless 800 \gtrless aa + bb$ avec z entre 19 & 21, c'eſt-à-dire entre g & h.

SEPTIE'ME PROPOSITION.

Partager la ſomme aa + bb *de deux quarrez parfaits donnez* aa *&* bb, *dont le premier* aa *ne ſoit pas moindre que le ſecond* bb, *en deux autres quarrez parfaits* zz *&* yy ; *de ſorte que* z *tombe entre la moindre limite* g, *que nous ſuppoſerons plus grande que le côté* a, *& la plus grande limite* h, *dont le quarré ne ſurpaſſe* aa + bb.

EXPRESSION ABREGE'E.

1° SUppoſant $a [\supset b$, $g [a, g] h$, $h \supset]$ $\sqrt{aa + bb}$, $z [g, \zeta] h$.

2° $zz + yy \supset aa + bb$.

Calcul.

3° Employant les formules de x, z & y comme elles ſont à la deuxiéme propoſition, l'on rendra $z [\sqrt{aa + bb - hh}$, que nous appellerons m, & enſuite $z] \sqrt{aa + bb - gg}$, que nous appellerons n.

4° La premiere de ces deux comparaiſons fournira $v] \dfrac{-bt + t\sqrt{aa + bb - mm}}{a + m}$.

5° De la ſeconde viendra $v\,[\,\frac{-bt+t\sqrt{aa+bb-nn}}{a+n}$;

6° De ſorte que dans les numerateurs des quatriéme & cinquiéme remettant $aa+bb-hh$, au lieu de mm, & $aa+bb-gg$, au lieu de nn, il viendra les deux numeros ſuivans.

7° $v\,]\,\frac{-bt+th}{a+m}$, 8, avec $v\,[\,\frac{-bt+tg}{a+n}$.

9° Il eſt clair que ce calcul rend $zz\,[\,aa+bb-hh$ & $]\,aa+bb-gg$. Comme donc le même calcul rend $zz+yy\,\mathfrak{D}\,aa+bb$; il s'enſuit que yy eſt moindre que hh & plus grand que gg, c'eſt-à-dire $y\,[\,g$ & $y\,]\,h$, nôtre formule de y ſurpaſſant θ, en conſequence de ce qui a été dit au troiſiéme numero du ſecond calcul de la propoſition precedente.

10° Prenant enfin pour la valeur de z, ce qui faiſoit celle de y au ſeptiéme numero de la deuxiéme queſtion, & pour la valeur de y, ce qui faiſoit celle de z au ſixiéme de la même queſtion; le probleme propoſé ſera reſolu.

Reſolution & détermination.

v & t arbitraires, $a\,[\,\mathfrak{D}\,b$, $g\,[\,a$, $g\,]\,h$, $h\,\mathfrak{D}\,]\,\sqrt{aa+bb}$,

$m\,\mathfrak{D}\,\sqrt{aa+bb-hh}$, $n\,\mathfrak{D}\,\sqrt{aa+bb-gg}$,

$v\,]\,\frac{th-tb}{a+m}$, $v\,[\,\frac{tg-tb}{a+n}$,

$$x \gtrless \frac{2av + 2bt}{vv + tt}, \quad z \gtrless tx - b \gtrless \frac{btt + 2atv - bvv}{vv + tt},$$

$$y \gtrless a - vx \gtrless \frac{att - 2btv - avv}{vv + tt}.$$

NOMBRES. PREMIER EXEMPLE.

Pour partager la somme $aa + bb \gtrless 720$ de deux quarrez parfaits $aa \gtrless 576$ & $bb \gtrless 144$, dont les côtez ſont $a \gtrless 24$ & $b \gtrless 12$, en deux autres quarrez parfaits zz & yy; de ſorte que les limites données étant l'une $g \gtrless 25$, & l'autre $h \gtrless 26$, le côté z ſoit plus grand que g & au deſſous de h, c'eſt-à-dire entre 25 & 26; ſoit $t \gtrless 30$. La reſolution numerique ſera $m \gtrless \frac{663425}{100000}$, $n \gtrless \frac{974679}{100000}$, $v] \frac{137101}{10000}$, $v [\frac{115567}{10000}$. Soit $v \gtrless 12$. Il viendra $x \gtrless \frac{36}{29}$, $z \gtrless \frac{732}{29}$, $y \gtrless \frac{264}{29}$, avec l'examen $zz + yy \gtrless \frac{535824 + 69696}{841}$ $\gtrless 720 \gtrless aa + bb$, & z entre 25 & 26, entre g & h.

SECOND EXEMPLE.

Soient maintenant $a \gtrless 20$, $b \gtrless 20$, $g \gtrless 27$, $h \gtrless 28$, $t \gtrless 30$. La reſolution numerique

ſera $m \gtrless 4$, $n \gtrless \frac{842615}{100000}$, $v] 10$, $v [\frac{73876}{10000}$,

& ſi l'on veut que le nombre v faſſe $\frac{15}{2}$, il viendra $x \gtrless \frac{80}{51}$, $z \gtrless \frac{460}{17}$, $y \gtrless \frac{140}{17}$, avec l'examen.

$$zz + yy \gtrless \frac{211600 + 19600}{289} \gtrless 800 \gtrless aa + bb,$$

& z entre 27 & 28, entre g & h.

HUITIE'ME PROPOSITION.

Partager autant de quarrez parfaits donnez que l'on voudra en autant d'autres parfaits que l'on ſouhaitera, à condition que la multitude des quarrez cherchez ne ſoit pas moindre que celle des donnez.

1° LEs ſept exemples qui ſuivent ſuffiront.

PRE'MIER EXEMPLE.

2° Pour partager aa en trois quarrez parfaits.

3° Soit $yz \ldots a\mathcal{Q} + xz\mathcal{Q} + vz\mathcal{Q} \gtrless aa$.

4° Il viendra pour reſolution les quatre numero ſuivans, où les lettres y, x, v, ſont arbitraires.

$$5^{o}\ z \gtrless \frac{2ay}{yy + xx + vv}. \quad 6,\ yz \ldots a \gtrless \frac{\sqrt{ayy \ldots axx + avv}}{yy + xx + vv}.$$

$$7^{o}\ xz \gtrless \frac{2ayx}{yy + yx + vv}. \quad 8,\ vz \gtrless \frac{2ayv}{yy + xx + vv}.$$

SECOND EXEMPLE.

8° Partager aa en quatre quarrez parfaits.

9° Il eſt certain que prenant $\frac{1}{2}a$ pour chaque côté, le Probleme ſera reſolu ; mais la reſolution ne ſera que particuliere.

10° Soit donc $\overline{yz \ldots a}\,\mathcal{Q} + \overline{xz}\,\mathcal{Q} + \overline{vz}\,\mathcal{Q} + \overline{tz}\,\mathcal{Q} \gtrless aa$.

11° L'on trouvera pour reſolution les cinq numeros ſuivans, ou les lettres y, x, v, t ſont arbitraires.

$$12^{o}\ z \gtrless \frac{2ay}{yy + xx + vv + tt}.$$

$$13^{o}\ yz \ldots a \gtrless \frac{\sqrt{ayy \ldots axx + avv + att}}{yy + xx + vv + tt}.$$

$$14^{o}\ xz \gtrless \frac{2ayx}{yy + xx + vv + tt}$$

15° vz

150 $vz \propto \frac{2ayv}{yy + xx + vv + tt}$?

160 $tz \propto \frac{2ayt}{yy + xx + vv + tt}$.

170 Suivant cette methode l'on partagera aa en autant de quarrez parfaits que l'on voudra, ſi pour cinquiéme côté l'on prend $ſz$, pour ſixiéme rz, & ainſi de ſuite, ſelon le nombre des quarrez parfaits dont on aura beſoin.

TROISIE'ME EXEMPLE.

180 Partager $aa + bb$ en trois quarrez parfaits.

190 Soit $\overline{yz...a}\,Q + \overline{xz...b}\,Q + \overline{vz}\,Q \propto aa + bb$.

200 Il viendra pour reſolution les quatre numero ſuivans, où les lettres y, x, v ſont arbitraires.

210 $z \propto \frac{2ay + 2bx}{yy + xx + avv}$. 220, $yz... a \propto \frac{\overline{ayy + 2bxy...axx + vv}}{yy + xx + vv}$.

230 $xz...b \propto \frac{\overline{bxx + 2axy...byy + bvv}}{yy + xx + vv}$,

240 $vz \propto \frac{2avy + 2bxv}{yy + xx + vv}$.

QUATRIE'ME EXEMPLE.

250 Partager $aa + bb$ en quatre quarrez parfaits.

260 Soit $\overline{yz...a}\,\square + \overline{xz...b}\,\square + \overline{vz}\,\square + \overline{tz}\,\square \mathrel{\text{D}} aa + bb$.

270 Le Probleme ſe reſoudra par les cinq numero ſuivans, où les lettres y, x v, t ſont arbitraires.

$$28^{\circ}\ z \mathrel{\text{D}} \frac{2ay + 2bx}{yy + xx + vv + tt}.29yz...a$$

$$\mathrel{\text{D}} \frac{\overline{ayy + 2bxy...axx} + \overline{avv + att}}{yy + xx + vv + tt}$$

$$30\ \overline{xz...b} \mathrel{\text{D}} \frac{\overline{bxx + 2ayx...byy} + \overline{bvv + btt}}{yy + xx + vv + tt}.$$

$$310\ vz \mathrel{\text{D}} \frac{2ayv + 2bxv}{yy + xx + vv + tt}.$$

$$320\ tz \mathrel{\text{D}} \frac{2aty + 2btx}{yy + xx + vv + tt}.$$

330 De même quand on voudra partager $aa + bb$ en plus de quatre quarrez, le cinquiéme côté ſera fz, le ſixiéme rz, & ainſi de ſuite, ſuivant le nombre des quarrez parfaits en quoy le partage devra ſe faire.

CINQUIE'ME EXEMPLE.

340 Partager $aa + bb + cc$ en trois autres quarrez parfaits.

350 Soit $\overline{yz...a}\,\square + \overline{xz...b}\,\square + \overline{vz...c}\,\square \mathrel{)\!(} aa + bb + cc$.

360 Il viendra pour reſolution les quatre numero ſuivants, où les lettres y, x, v, ſont arbitraires.

370 $z \mathrel{)\!(} \dfrac{2ay + 2bx + 2cv}{yy + xx + vv}$.

380 $yz...a \mathrel{)\!(} \dfrac{\overline{ayy + 2bxy + 2cvy...axx + avv}}{yy + xx + vv}$.

390 $xz...b \mathrel{)\!(} \dfrac{\overline{bxx + 2ayx + 2cvx...byy + bvv}}{yy + xx + vv}$.

400 $vz...c \mathrel{)\!(} \dfrac{\overline{cvv + 2bxv + 2ayv...cyy + cxx}}{yy + xx + vv}$.

SIXIE'ME EXEMPLE.

410 Partager $aa + bb + cc$ en quatre quarrez parfaits.

420 Soit $\overline{yz...a}\,\square + \overline{xz...b}\,\square + \overline{vz...c}\,\square + \overline{tz}\,\square \mathrel{)\!(} aa + bb + cc$.

430 La reſolution eſt contenuë dans les cinq numero ſuivants, où y, x, v, t ſont arbitraires.

440 $z \gg \dfrac{2ay + 2bx + 2cv}{yy + xx + vv + tt}$

450 $yz \ldots a \gg \dfrac{ayy + 2bxy + 2cvy \ldots axx + avv + att}{yy + xx + vv + tt}$.

460 $xz \ldots b \gg \dfrac{bxx + 2ayx + 2cvx \ldots byy + bvv + btt}{yy + xx + vv + tt}$.

470 $vz \ldots c \gg \dfrac{cvv + 2bxv + 2ayv \ldots cyy + cxx + ctt}{yy + xx + vv + tt}$

480 $tz \gg \dfrac{2ayt + 2bxt + 2cvt}{yy + xx + vv + tt}$.

490 Si l'on veut partager $aa + bb + cc$ en plus de quatre quarrez parfaits ; le cinquiéme côté ſe nommera fz, le ſixiéme rz & ainſi de ſuite, ſelon le nombre des quarrez parfaits en quoy le partage ſe devra faire.

SEPTIE'ME EXEMPLE.

500 Partager $aa + bb + cc + dd$ en quatre autres quarrez parfaits.

510 Ecrivons $\overline{yz \ldots a}\,\mathcal{Q} + \overline{xz \ldots b}\,\mathcal{Q} + \overline{vz \ldots c}\,\mathcal{Q} + \overline{tz \ldots d}\,\mathcal{Q} \gg aa + bb + cc + dd$.

520 Nous trouverons pour reſolution les cinq numero qui ſuivent, où y, x, v, t ſont arbitraires.

$$530\ z\,\mathrm{)\!(}\ \frac{2ay + 2bx + 2cv + 2dt}{yy + xx + vv + tt}.$$

$$540\ yza\,\mathrm{)\!(}\ \frac{ayy + 2bxy + 2cvy + 2dty \ldots axx + avv + att}{yy + xx + vv + tt}.$$

$$550\ xz\ldots b\,\mathrm{)\!(}\ \frac{bxx + 2ayx + 2cvx + 2dtx \ldots byy + bvv + btt}{yy + xx + vv + tt}.$$

$$560\ vz\ldots c\,\mathrm{)\!(}\ \frac{cvv + 2ayv + 2bxv + 2dtv \ldots cyy + cxx + att}{yy + xx + vv + tt}.$$

$$570\ tz\ldots d\,\mathrm{)\!(}\ \frac{dtt + 2cvt + 2bxt + 2ayt \ldots dyy + dxx + dvv}{yy + xx + vv + tt}.$$

580 Si l'on avoit voulu partager la ſomme $aa + bb + cc + dd$ en plus de quatre quarrez ; l'on auroit nommé le cinquiéme côté fz, le ſixiéme rz & ainſi de ſuite à l'infini.

590 Remarquez que toutes les fois qu'il s'agit du partage des quarrez, nous ſuppoſons a [ )o b, b [ )o c, c [ )o d & ainſi de ſuite, à quoy il faudra avoir égard quand on devra reſoudre les queſtions de cette nature.

NEUVIE'ME PROPOSITION.

Partager un nombre donné f en autant de parties que l'on voudra, dont chacune ait ſes deux limites telles que nous les allons marquer.

1° LEs parties que l'on cherchera s'appelleront icy M, N, O, P, Q, R.

Table.

2° Pour diviſer f en deux parties, il faudra faire tomber

M entre g & $g + h$
N entre k & $k + h$

3° Suppoſant $g + k + h \supset f$; de ſorte que la ſomme des petites limites fait $f - h$, & que celle des grandes fait $f + h$.

4° Pour diviſer f en trois parties, il faudra faire tomber

M entre g & $g + h$
N entre k & $k + h$
O entre l & $l + 2h$

5° Suppoſant $g + k + l + 2h \supset f$; de ſorte que la ſomme des petites limites fait $f - 2h$, & que celle des grandes fait $f + 2h$.

6° Pour diviſer f en quatre parties, il faudra faire tomber

M entre g & $g + h$
N entre k & $k + h$
O entre l & $l + h$
P entre m & $m + 3h$

7° Suppoſant $g + k + l + m + 3h \supset f$; de ſorte que la ſomme des petites limites fait $f - 3h$, & que celle des grandes fait $f + 3h$.

8° Pour diviſer f en cinq parties, il faudra faire tomber.

M entre g & $g + h$
N entre k & $k + h$
O entre l & $l + h$
P entre m & $m + h$
Q entre n & $n + 4h$

9° Suppoſant $g + k + l + m + n + 4h \supset f$; de ſorte que la ſomme des petites limites fait $f - 4h$, & que celle des grandes fait $f + 4h$

10° Pour diviſer f en ſix parties, il faudra faire tomber.

M entre g & $g + h$
N entre k & $k + h$
O entre l & $l + h$
P entre m & $m + h$
Q entre n & $n + h$
R entre o & $o + 5h$

11° Suppoſant $g + k + l + m + n + o + 5h \supset f$; de ſorte que la ſomme des petites limites fait $f - 5h$, & que celle des grandes fait $f + 5h$.

12° Il eſt clair que l'on peut continuer cette table autant que l'on voudra.

Regle.

13° Déterminez, comme il vous plaira, toutes les parties cherchées, excepté la derniere. La ſomme des parties que vous aurez déterminées étant retranchée de la ſomme donnée f, il reſtera la

partie que vous n'aurez pas déterminée, & cette partie tombera ainſi d'elle-même entre les deux limites que l'on ſouhaitoit qu'elle eût

Démonſtration de la Regle.

140 Nous nous contenterons de démontrer le partage propoſé au quatriéme numero, parce que les autres partages ſe peuvent démontrer de la même façon.

150 Puiſque par le cinquiéme numero, $f \gtrless g + k + l + 2h$,

160 & que nous faiſons tomber M entre g & $g + h$;

170 il reſte pour $N + O$ une quantité qui ſurpaſſe $k + l + h$ & eſt au deſſous de $k + l + 2h$.

180 Le quatriéme numero preſcrit ſeulement que la quantité $N + O$ ſoit entre $k + l$ & $k + l + 3h$, & c'eſt ce qui ne ſauroit manquer d'arriver, à cauſe du dix-ſeptiéme numero.

190 Semblablement à cauſe de M entre g & $g + h$ joint a N entre k & $k + h$, l'un & l'autre parce que nous déterminons ainſi M & N,

20° il s'en ſuit que la quantité $M + N$ eſt entre $g + k$ & $g + k + 2h$.

210 Mais par le cinquiéme numero, $f \gtrless g + k + l + 2h$.

220 C'eſt pourquoy nous devons conclure qu'il reſte pour O une quantité qui ſurpaſſe l & eſt au deſſous de $l + 2h$, ce que nous ſouhaitions qui arrivât.

230 L'évidence des dix-ſeptiéme & vingt-deuxiéme numero eſt fondée ſur ce que les parties M, N, O ajoûtées en une ſomme doivent égaler

la

la quantité f qui eſt ſuppoſée faire le même que $g + k + l + 2h$.

Exemple par nombres.

24° Soit $f \gtrless 64$, $g \gtrless 18$, $k \gtrless 21$, $l \gtrless 13$, $h \gtrless 5$, & qu'il faille partager 64 en trois parties, M, N, O,

25° La premiere M entre $g \gtrless 18$ & $g + h \gtrless 24$

La ſeconde N entre $K \gtrless 21$ & $K + h \gtrless 27$,

La troiſiéme O entre $l \gtrless 13$ & $l + 2h \gtrless 25$

26° Où l'on void que $g + K + l + 2h \gtrless 64 \gtrless f$.

27° Pour faire le partage requis, prenons deux nombres à volonté, l'un pour M, entre 18 & 24, l'autre pour N, entre 21 & 27.

28° Soit $M \gtrless 19$ avec $N \gtrless 22$. Leur ſomme 41 étant ôtée de 64, il reſte pour O le nombre 23, qui tombe entre 13 & 25, comme il falloit

29° Soient, ſi l'on veut, $M \gtrless 23$ & $N \gtrless 26$. Leur ſomme 49 étant ôtée de 64, il reſte $O \gtrless 15$, ce qui tombe entre 13 & 25, comme il falloit.

DIXIE'ME PROPOSITION.

Rectifier les limites données, quand elles en ont beſoin, c'eſt-à-dire, quand elles ne répondent pas à la table de la neuvième propoſition.

1° PRemierement l'on examinera ſi les limites données ne renferment ni l'une ni l'autre des deux abſurditez qui ſuivent.

2° La premiere eſt, quand la ſomme des petites limites n'eſt pas moindre que *f*; la ſeconde, quand la ſomme des grandes limites ne ſurpaſſe pas *f*.

3° Quand l'une ou l'autre de ces deux abſurditez ſe trouve dans le Probleme, on doit le laiſſer comme contraire au ſens commun; parce que la premiere de ces deux abſurditez voudroit, que l'on partageât *f*, en un nombre de parties, dont la ſomme ſurpaſſât *f*, & la ſeconde, que l'on partageât *f*, en un nombre de parties dont la ſomme fût moindre que *f*

4° Quand les limites données ne renfermeront ni l'une ni l'autre de ces deux abſurditez on pourra reſoudre par celle des deux methodes ſuivantes que l'on voudra, où par difference d'une couple, nous entendons l'excés de ſa grande limite par deſſus ſa petite.

Premiere Methode.

5° Regle premiere. Rangez les couples des limites données, de maniere que la difference de la premiere couple ne ſurpaſſe pas la difference d'aucune

des couples ſuivantes. Faites le même pour la ſeconde couple, & ainſi de ſuite.

6° Regle deuxiéme. Si deux ou pluſieurs couples données ont leurs differences égales, rangez ces couples, de maniere que la petite limite de la premiere deſdites couples ne ſurpaſſe pas la petite d'aucune de ces mêmes, & ainſi juſques à la fin des couples dont les differences ſeront égales, ce qui viſiblement ne s'oppoſera jamais à l'obſervation de la regle premiere.

7° Regle troiſiéme. Prenez pour *b* la difference de la premiere couple, & ajoûtez cette difference à chacune des petites limites données, excepté la derniere, ou l'ôtez de chacune des grandes données, excepté la derniere, ſi ceci paroît plus commode, ou même employez tantôt l'un tantôt l'autre, pour avoir toutes les grandes limites corrigées, excepté la derniere, laquelle quelque fois n'aura pas beſoin de correction.

8° Regle quatriéme. Si aprés cette premiere correction les limites ne répondent pas encore à ce que demande la table, l'on ſe ſouviendra qu'il eſt toûjours permis d'augmenter les petites limites & de diminuer les grandes (& jamais au contraire) pourvû que ces augmentations ou diminutions n'empêchent pas que les limites qui étoient petites ne demeurent petites, & que celles qui étoient grandes ne demeurent grandes.

9° Par la quatriéme Regle on pourra toûjours achever de rectifier, de maniere que les limites répondent enfin aux formules de la table, ſans contredire les limites qui avoient été données au commencement.

10° Au reſte il faut remarquer, que plus la quantité, que l'on prend pour *b*, eſt grande, ſans

Seconde Methode.

11° Regle premiere. Rangez les couples de limites données, de maniere que la premiere petite limite ne surpasse aucune autre petite, & ainsi de suite jusqu'à la fin, & quand deux ou plusieurs couples auront leurs petites limites égales, rangez ces couples de maniere que la difference de la premiere desdites couples ne surpasse pas la difference d'aucune de ces mêmes, & ainsi de suite jusqu'à ce qu'elles soient finies.

12° Regle deuxiéme Prenez pour *h* une difference qui n'en surpasse aucune autre.

13° Regle troisiéme. Ajoûtez cette difference à chacune des petites limites des couples rangées, comme on a prescrit, excepté la derniere, ou l'ôtez de chacune des grandes limites données, excepté la derniere, si ceci paroît plus commode, ou même faites tantôt l'un & tantôt l'autre.

14° Regle quatriéme. Pour finir, suivez les huitiéme, neuviéme & dixiéme numero.

Premier Exemple par nombres.

15° Partager 49 en deux nombres dont l'un *M* soit entre 10 & 17, & l'autre *N* entre 10 & 39.

16° *Limites données.*

10 & 17
10 & 39
Nombre à partager *f* ☌ 49.

17° La ſomme 20 des petites limites données eſt moindre que f, & la ſomme 56 des grandes ſurpaſſe f, ce qui rend le probleme ſolvable.

18° L'ordre des deux couples répond à l'une & à l'autre des deux methodes.

19° J'ajoûte la premiere petite limite 10 avec la ſeconde grande 39, ce qui fait 49 ☽ f. Mais ajoûtant la premiere grande 17 avec la ſeconde petite 10, la ſomme ne fait que 27 ; de ſorte qu'il s'en manque 22 que l'on ne trouve 49. J'augmente donc de 22 la ſeconde petite limite 10, ce qui fait 32. Par ce moyen nous aurons pour

Limites rectifiées.

M entre 10 & 17
N entre 32 & 39

20° Nous prendrons donc pour M le nombre que nous voudrons entre 10 & 17. L'excés de 49 par deſſus le nombre que nous aurons pris, ſera N, qui tombera entre 32 & 39, & à plus forte raiſon entre 10 & 39, comme on ſouhaitoit.

21° Soit M ☽ 11 Il viendra N ☽ 38.

22° Soit M ☽ 16 Il viendra N ☽ 33.

Second Exemple.

23° Partager 49 en deux nombres M, N ; le premier M entre 10 & 17, le ſecond N entre 30 & 34.

24° Selon la premiere methode nous écrirons les

Limites données.

N entre 30 & 34
M entre 10 & 17

25° La ſomme de la premiere petite limite 30 & de la ſeconde grande 17 fait 47, de ſorte qu'ici nous avons deux de trop peu ; à cauſe de quoy au lieu de 30 nous écrirons 32.

26° La premiere grande 34 & la ſeconde petite 10 fait en tout 44, de ſorte qu'ici nous avons cinq de trop peu ; à cauſe de quoy au lieu de 10 nous écrivons 15.

Limites rectifiées.

N entre 32 & 34
M entre 15 & 17

27° Selon la ſeconde methode nous écrirons les

Limites données.

M entre 10 & 17
N entre 30 & 34

28° La ſomme de la premiere petite & de la ſeconde grande fait cinq de trop peu.

29° La ſomme de la premiere grande & de la ſeconde petite fait deux de trop peu.

30° J'augmente 10 de 5 & 30 de 2. Il vient pour

Limites rectifiées.

M entre 15 & 17
N entre 32 & 34

TROISIE'ME EXEMPLE.

31° Partager 49 en deux nombres *M*, *N* ; le premier *M* entre 10 & 17, le ſecond *N* entre 34 & 36.

32° Selon la premiere methode j'écris les

Limites données.

N entre 34 & 36
M entre 10 & 17

33° La ſomme de 34 & 17 fait 51, ce qui ſurpaſſe 49 de 2.

34° La ſomme de 36 & 10 fait 46, ce qui eſt de 3 moindre que 49

35° Avec 10 j'ajoûte 3 & de 17 j'ôte 2. Il vient pour

Limites rectifiées.

N entre 34 & 36
M entre 13 & 15

36° Selon la ſeconde methode nous écrirons les

Limites données.

M entre 10 & 17
N entre 34 & 36

37° A preſent 10 + 36 ☽ 46, ce qui contient 3 de trop peu,

38° & 17 + 34 ☽ 51, nombre qui contient 2 de trop

39° J'ajoûte 3 avec 10 & retranche 2 de 17. Par ce moyen viennent les

Limites rectifiées.

M entre 13 & 15
N entre 34 & 36

QUATRIE'ME EXEMPLE.

40° Partager 49 en deux nombres M, N, dont le premier M, ſoit entre 10 & 17, & le ſecond N, entre 30 & 45.

4 ° L'une & l'autre methode veulent que l'on écrive

Limites données.

M entre 10 & 17
N entre 30 & 45

42° L'addition en croix fait $10 + 45 \gtrdot 55$, ce qui excede 49 de 6.

43° Semblablement $17 + 30 \gtrdot 47$, & 47 eſt trop petit de 2.

49° J'ôte 6 de 45 & ajoûte 2 à 30. Cela fournit les

Limites rectifiées.

M entre 10 & 17
N entre 32 & 39

CINQUIE'ME EXEMPLE.

50° Partager 49 en deux nombres M, N, l'un M entre 10 & 17, l'autre N entre 40 & 45.

51° La ſomme 50 des petites limites 10 & 40 excede 49, ce qui montre que le probleme eſt contraire au ſens commun.

SIXIE'ME EXEMPLE.

52° Partager 49 en deux nombres M, N, l'un M entre 10 & 17, l'autre N entre 39 & 45.

53° Ce

53o Ce probleme eſt encore contraire au ſens commun, parce que la ſomme 49 des petites limites 10 & 39 égale 49.

Septieme Exemple.

54o Partager 49 en deux nombres M, N, l'un M entre 10 & 17, l'autre N entre 30 & 31

55o Ici la ſomme 48 des deux grandes limites 17 & 31 eſt moindre que 49.

Huitie'me Exemple.

56o Partager 49 en deux nombres M, N, l'un M entre 10 & 17, l'autre N entre 30 & 32

57o Ici la ſomme 49 des deux grandes limites 17 & 32 rend le probleme abſurde, parce qu'elle égale f, c'eſt-à-dire 49.

Neuvie'me Exemple.

58o Partager 49 en trois nombres M, N, O, dont le premier M ſoit entre 10 & 17, le ſecond N entre 10 & 13, le troiſiéme O entre 28 & 32.

59o La premiere methode range les

Limites données.

N entre 10 & 13
O entre 28 & 32
M entre 10 & 17

66o La difference 3 de la premiere couple étant priſe pour h il vient, en corrigeant toutes les couples excepté la derniere

N entre 10 & 13
O entre 28 & 31

610 La ſomme 44 des grandes limites 13 & 31 ; il reſte cinq pour la derniere petite limite, & la ſomme 38 des petites limites 10 & 28, étant ôtée de 49, il reſte 11 pour la derniere grande limite.

620 De cette façon *M* tomberoit entre 5 & 11,

630 & l'on auroit

N entre 10 & 13
O entre 28 & 31
M entre 5 & 11

640 Mais comme les limites données de *M* étoient 10 & 17, la couple *M* entre 5 & 11 eſt vicieuſe, parce qu'elle diminuë de cinq la petite limite donnée 10.

650 Nous corrigerons cette erreur, en rendant les 5 à la derniere petite limite & diminuant de cinq le total des grandes limites precedentes.

660 Comme il n'y en a que deux, nous diviſerons 5 par 2. Le quotient $2\frac{1}{2}$ ſera la quantité qu'il faudra retrancher de chacune deſdites deux grandes limites du ſoixante-troiſiéme numero.

670 De cette maniere viendront les

Limites rectifiées.

N entre 10 & $10\frac{1}{2}$
O entre 28 & $28\frac{1}{2}$
M entre 10 & 11

680 Si on range les limites données ſelon la ſeconde methode l'ordre ſera

N entre 10 & 13
M entre 10 & 17
O entre 28 & 32

690 Enſuite prenant 3 pour *h*, il viendra

N entre 10 & 13
M entre 10 & 13

70° La ſomme 26 des grandes limites 13 & 13 étant ôtée de 49, il reſte 23 pour la derniere petite limite, & 49 ôtant la ſomme 20 des deux petites 10 & 10, le reſte 29 eſt la derniere grande.

71° Preſentement nous avons

N entre 10 & 13
M entre 10 & 13
O entre 23 & 29

72° Mais les limites données placeoient *O* entre 28 & 32.

73° C'eſt pourquoy la troiſiéme couple du ſeptante uniéme numero eſt vicieuſe, en ce qu'elle diminuë la petite limite donnée 28.

74° La diminution eſt de cinq que nous tendrons à 23, & dont nous diminuerons le total des grandes limites 13 & 13, à chacune ſa moitié de cinq, parce qu'il n'y a que deux grandes limites qui precedent.

75° *Limites rectifiées.*

N entre 10 & $10\frac{1}{2}$
M entre 10 & $10\frac{1}{2}$
O entre 28 & 29

DIXIE'ME EXEMPLE.

76° Partager 64 en trois nombres, le premier *M* entre 10 & 28, le ſecond *N* entre 18 & 24, le troiſiéme *O* entre 20 & 27.

77° Premiere methode.

Limites données.

N entre 18 & 24
O entre 20 & 27
M entre 10 & 28

78° *Limites rectifiées.*

N entre 18 & 24
O entre 21 & 27
M entre 13 & 25

79° Ayant pris 6 pour *b*, nous avons soustrait 6 de 27, pour former la seconde couple rectifiée. Le reste est facile.

80° Seconde methode.

Limites données.

M entre 10 & 28
N entre 18 & 24
O entre 20 & 27

81° Prenant 6 pour *b*, il vient par addition

M entre 10 & 16
N entre 18 & 24

810 De soixante-quatre ôtant 16 + 24, c'est-à-dire 40, il reste 24, pour la derniere petite limite, & du même nombre 64 ôtant 10 + 18, c'est-à-dire 28, il reste 36 pour la derniere grande.

M entre 10 & 16
N entre 18 & 24
O entre 24 & 36

83° Mais la troisiéme grande limite 36 doit être corrigée, parce qu'elle surpasse de 9 la troisiéme grande limite donnée, & ce nombre 9 divisé par

2 fournit $4\frac{1}{2}$ d'augmentation pour chaque petite limite des deux premieres couples.

Limites rectifiées.

M entre $14\frac{1}{2}$ & 16
N entre $22\frac{1}{2}$ & 24
O entre 24 & 27

84° Si nous employons la ſeconde methode en nous ſervant de la ſouſtraction, il viendra

M entre 22 & 28
N entre 18 & 24
O entre 12 & 24

85° Mais comme le nombre 12 eſt trop petit de 8, nous écrirons

Limites rectifiées.

M entre 22 & 24
N entre 18 & 20
O entre 20 & 24

ONZIE'ME EXEMPLE.

86° Partager 120 en quatre nombres, le premier *M* entre 10 & 16, le ſecond *N* entre 18 & 30, le troiſiéme *O* entre 20 & 36, le quatriéme *P* entre 40 & 60.

87° L'une & l'autre methode permettent d'écrire

Limites données.

M entre 10 & 16
N entre 18 & 30
O entre 20 & 36
P entre 40 & 60

88o Par voye d'addition il viendra

M entre 10 & 16
N entre 18 & 24
O entre 20 & 26

89o De cette maniere *P* tombe entre 54 & 72.

90o Comme 72 surpasse de 12 la quatriéme grande donnée, & qu'il y a trois couples en tout devant la derniere, nous prendrons le tiers de 12 qui fait 4, & ajoûterons 4 à chacune des petites limites trouvées.

Limites rectifiées.

M entre 14 & 16
N entre 22 & 24
O entre 24 & 26
P entre 54 & 60

91o Resolvons presentement la question par voye de soustraction Il s'agit de rectifier les limites du 87 numero.

M entre 10 & 16
N entre 24 & 30
O entre 30 & 36

92o De cette maniere *P* tombe entre 38 & 56, & 38 est trop petit de 2 dont le tiers fait $\frac{2}{3}$, qu'il faut ôter de chacune des grandes limites trouvées.

Limites rectifiées.

M entre 10 & 15 $\frac{1}{3}$
N entre 24 & 29 $\frac{1}{3}$
O entre 30 & 35 $\frac{1}{3}$
P entre 40 & 56

930 Reſolvons en partie par ſouſtraction & en partie par addition le 87e numero.

M entre 10 & 16
N entre 18 & 24
O entre 30 & 36

940 Ceci veut que P tombe entre 44 & 62, & comme la grande limite 62 eſt trop haute de 2 dont le tiers fait $\frac{2}{3}$ qu'il faut ajoûter à chacune des petites limites trouvées, nous écrirons les

Limites rectifiées.

M entre 10 $\frac{2}{3}$ & 16
N entre 18 $\frac{2}{3}$ & 24
O entre 30 $\frac{2}{3}$ & 36
P entre 44 & 60

950 Nous avons reſolu aſſez d'exemples, pour enſeigner l'uſage de la table, quand les deux limites de chaque couple ſont données. Comme ſouvent quelques-unes de ces limites ſont arbitraires, nous ajoûterons la regle ſuivante pour ces ſortes de cas.

Regle.

960 Quand la petite limite de quelque couple que ce ſoit n'eſt pas donnée, mettez theta en la place de chaque petite limite qui manque. Quand ce ſera la grande qui manquera, mettez la va-

leur de f en ſa place. Obſervez toûjours la pre-premiere methode.

EXEMPLE PREMIER.

970 Qu'il faille diviſer 400 en quatre parties, dont la premiere M ſurpaſſe 3, la ſeconde N ſoit au deſſous de 9 la troiſiéme O entre 46 & 68, la quatriéme P ſans aucunes limites preſcrites.

Limites ordonnées.

N entre 0 & 9
O entre 46 & 68
M entre 3 & 400
P entre 0 & 400

Limites rectifiées.

N entre 0 & 9
O entre 46 & 55
M entre 3 & 12
P entre 324 & 351

EXEMPLE SECOND.

980 Cependant il arrive quelque fois que l'on a raiſon de faire autrement. Comme par exemple ſi pour partager 400 en quatre nombres dont le premier ſurpaſſât 3, le ſecond ſurpaſſât cinq, le troiſiéme ſurpaſſât 7, & le quatriéme ſurpaſſât theta, où il n'y aucune grande limite preſcrite.

990 Rien n'empêche de prendre $h \propto 97$ & de faire tomber M entre 3 & 100, N entre 5 & 102, O entre 7 & 104, P entre 94 & 385, puiſque

puiſque ces limites rectifiées s'accordent avec le ſixiéme & ſeptiéme numero de la neuviéme propoſition ;

100° Ou ſi l'on vouloit avoir toute la liberté poſſible ſans fractions, *M* entre 3 & 131, *N* entre 5 & 133, *O* entre 7 & 135, *P* entre 1 & 385, & de cette maniere *b* feroit 128.

ONZIE'ME PROPOSITION.

Employer la dixiéme propoſition, pour le partage de quarrez parfaits donnez en d'autres quarrez parfaits, qui ſoient chacun entre deux limites données ; pourvû que l'on ne cherche pas moins de quarrez parfaits qu'il n'y en aura de donnez.

EXEMPLE PREMIER.

1° POur diviſer le quarré parfait *aa* ↀ 49, dont le côté *a* fait 7, en deux quarrez parfaits *zz* & *yy* ; de ſorte que *z* ſoit entre 3 & 4, & que *y* tombe entre 5 & 6.

2° Les lettres s'entendent dans cette propoſition, comme dans les huit premieres.

Calcul.

3° *Les quarrez des limites données ſont*

zz entre 9 & 16
yy entre 25 & 36

4o Rectifions ces deux couples de limites, nous aurons les

Quarrez rectifiez des limites données.

zz entre 13 & 16
yy entre 33 & 36

5o Faiſons tomber γz entre 13 & 16, de ſorte que z (par extraction ſoit entre γ 13 & γ 16.

6o Nous avons $a \mathrel{\text{Ɔ}} 7$, $g \mathrel{\text{Ɔ}} \gamma 13$, $h \mathrel{\text{Ɔ}} 4$, & z doit tomber entre g & h.

7o Ayant recours à la premiere propoſition je prens $t \mathrel{\text{Ɔ}} 1000$, il viendra, en entiers v [1767, avec v] 1915.

Soit $v \mathrel{\text{Ɔ}} 1800$, il viendra $x \mathrel{\text{Ɔ}} \frac{63}{10600}$ & la

Reſolution.

8o $z \mathrel{\text{Ɔ}} \frac{196}{53}$, $y \mathrel{\text{Ɔ}} \frac{315}{53}$.

9o Examen. $\gamma z + yy \mathrel{\text{Ɔ}} \frac{38416 + 99225}{2809}$

$\mathrel{\text{Ɔ}} 49 \mathrel{\text{Ɔ}} aa$.

10° D'ailleurs comme γ 13 fait à peu prés $\frac{3606}{1000}$, que $h \mathrel{\text{Ɔ}} 4$, que z fait preſque $\frac{3698}{1000}$ & y un peu plus de $\frac{5943}{1000}$. Comme d'ailleurs la racine 33 eſt $\frac{5744}{1000}$ & un peu plus, & que celle

de 36 fait 6 ; il s'enſuit que z eſt entre γ 13 γ 16, & que y tombe entre γ 33 & γ 36 ; de ſorte qu'à plus forte raiſon z eſt entre 3 & 4, & y entre 5 & 6.

DEUXIE'ME EXEMPLE.

11° Partager le quarré parfait $aa \mathrel{\text{Ↄ}} 49$ en trois quarrez parfaits zz, yy xx, de ſorte que z ſoit entre 2 & 3, y entre 3 & 4 & x entre 5 & 6.

12° *Quarrez des limites données.*

zz entre 4 & 9
yy entre 9 & 16
xx entre 25 & 36

Quarrez rectifiez des limites données.	*L'extraction fournit les côtez*
$\square z$ entre 4 & 9	z entre 2 & 3
$\square y$ entre 9 & 14	y entre 3 & $\frac{3742}{1000}$
$\square x$ entre 26 & 36	x entre $\frac{5099}{1000}$ & 6

13° La premiere propoſition partagera 49 en deux quarrez parfaits $\square z$ & $\square' v'$, dont le premier $\square z$ aura ſon côté z entre 2 & 3.

14° $t' \mathrel{\text{Ↄ}} 10$, v' en entiers entre 13 & 16, $v' \mathrel{\text{Ↄ}} 14$, $x' \mathrel{\text{Ↄ}} \frac{49}{74}$, $z \mathrel{\text{Ↄ}} \frac{84}{37}$, $y' \mathrel{\text{Ↄ}} \frac{245}{37}$, que

nous appellerons a', $zz + y'y' \propto \frac{7056 + 60025}{1369}$ $\propto 49 \propto aa$.

15° La même proposition partagera $y'y' \propto \frac{60025}{1369} \propto a'a'$ en deux quarrez parfaits $z'z'$ & $'y''y'$ dont le premier $z'z'$ aura son côté z' entre 3 & 14.

16° $'i' \propto 70$, $'v'$ en entiers entre 32 & 38, $'u' \propto 36$, $'x' \propto \frac{2205}{7844}$, $z' \propto \frac{6860}{1961}$, $'y' \propto \frac{11025}{1961}$, $z'z' + 'y''y' \propto \frac{47059600 + 121550625}{3845521} \propto \frac{168610225}{3845521}$ $\propto \frac{60025}{1961} \propto 'a'a'$.

17° Les valeurs de z, z' & $'y'$ sont celles des côtez z, y, x que nous cherchions.

18° Ainsi la resolution est $z \propto \frac{84}{37}$, $\propto \frac{4452}{1961}$, $y \propto \frac{6860}{1961}$, $x \propto \frac{11025}{1961}$.

19° Examen. $zx + yy + xx \propto \frac{19820304 + 47059600 + 121550625}{3845521} \propto 49 \propto aa$.

20° D'ailleurs comme les côtez trouvez sont à

peu prés $z \propto \frac{2170}{1000}$, $y \propto \frac{3498}{1000}$, $x \propto \frac{5622}{1000}$,

il s'enſuit que z eſt entre 2 & 3, y entre 3 ♈ 14, & x entre ♈ 26 & ♈ 36; de ſorte qu'à plus forte raiſon y tombe entre 3 & 4, & x entre 5 & 6. Ainſi toutes les limites ſont obſervées & la queſtion pleinement reſoluë.

TROISIE'ME EXEMPLE.

210 Partager le quarré parfait $aa \propto 400$ en quatre quarrez parfaits zz, yy, xx, vv; de ſorte que les côtez tombent, le premier z entre 2 & 3, le ſecond y entre 5 & 6, le troiſiéme x entre 8 & 9, le quatriéme v entre 16 & 17.

220 *Quarrez des limites données.*	*Quarrez rectifiez des limites données.*
zz entre 4 & 9	zz entre 4 & 9
yy entre 25 & 36	yy entre 31 & 36
xx entre 64 & 81	xx entre 76 & 81
vv entre 256 & 289	vv entre 274 & 289

230 Des quarrez rectifiez l'extraction tire

z entre 2 & 3

y entre $\frac{55677}{10000}$ & 6

x entre $\frac{87177}{10000}$ & 9

v entre $\frac{165529}{10000}$ & 17

240 La premiere propoſition partagera $aa \propto 400$ en deux quarrez parfaits zz, $'y\,'y'$, dont le premier ζz aura ſon côté z entre 2 & 3.

250 $t' \propto 40$, $v' \propto 45$, $x' \propto \frac{72}{145} z \propto \frac{68}{29}$,

$y' \propto \frac{576}{29}$, que nous appellerons a'.

260 $zz + 'y\,'y' \propto \frac{4624 + 331776}{841} \propto 400 \propto aa$.

270 La même propoſition partagera $'a\,'a' \propto \frac{331776}{841}$ en deux quarrez parfaits $z'\,z'$, $'y'\,'y'$, dont le premier $z'\,z'$ aura ſon côté z' entre Υ 31 & Υ 36.

280 $'t' \propto 60$, $'v' \propto 81$, $'x' \propto \frac{10368}{32741}$, $z' \propto \frac{189504}{32741}$, $'y' \propto \frac{622080}{32741}$, que nous appellerons $'a'$.

290 Ainſi $'z\,'z' + \frac{'y\,'y' \propto 359117660 16 + 38698352 6400}{1071973081} \propto \frac{331776}{841} \propto 'a\,'a'$.

300 Demême nous partageons $'a'\,'a' \propto \frac{38698352 6400}{1071973081}$ en deux quarrez parfaits $'z'\,'z'$ & $y'\,y'$, dont le premier $'\zeta'\,'z'$ aura ſon côté $'z'$ entre Υ 76 & Υ 81.

310 $t' \propto 30$, $v' \propto 50$, $x' \propto \frac{311040}{556597}$, $z' \propto \frac{4976640}{556597}$, $y' \propto \frac{9331200}{556597}$.

$$32^0 z'' z' + y' y' \propto \frac{24766945689600 + 8707129344000}{309800220409}$$

$$\propto \frac{111838236129600}{309800220409} \propto \frac{38698352640}{1071973081} \propto a'' a'.$$

330 Les côtez z, z', z'', y', sont les quatre z, y, x, v que nous cherchions, & nous avons pour resolution.

$$z \propto \frac{68}{29} \propto \frac{1305124}{556597}; \quad y \propto \frac{189504}{32741} \propto \frac{3221568}{556597},$$

$$x \propto \frac{4976640}{556597}, \quad v \propto \frac{9331200}{556597}.$$

340 Examen. Le numerateur de zz est

17033486553 76

Le numerateur de yy est

10378500378624

Le numerateur de xx est

24766945689600

Le numerateur de vv est

8707129344000

Le dénominateur commun de ces quatre quarrez est 309800220409, de sorte que $zz + yy + xx + vv \propto 400 \propto aa$.

350 D'ailleurs les côtez trouvez sont à peu

prés, le premier $z \gtrless \frac{23448}{10000}$, le second $y \gtrless \frac{57880}{10000}$, le troiſiéme $x \gtrless \frac{89412}{10000}$, le quatriéme $v \gtrless \frac{167647}{10000}$, d'où il paroît que z tombe entre 2 & 3, y entre Υ 31 & Υ 36 x entre Υ 76 & Υ 81, v entre Υ 274 & Υ 289, de ſorte qu'à plus forte raiſon les limites preſcrites ſont toutes obſervées.

QUATRIE'ME EXEMPLE.

36° Pour partager $aa + bb \gtrless 400 + 64 \gtrless 464$ en deux autres quarrez parfaits zz, yy, dont le premier zz ait ſon côté z entre 4 & 12, & le ſecond yy ſon côté y entre 15 & 22, nous écrirons d'abord les

37° *Quarrez des limites données.*

zz entre 16 & 144
yy entre 225 & 484

38° Les quarrez rectifiez des limites données ſeront

zz entre 16 & 144
yy entre 320 & 448

39° De ſorte que par extraction il faudra que z tombe entre 4 & 12, & y entre $\frac{178885}{10000}$ & $\frac{211660}{10000}$.

40° Par la deuxiéme propoſition nous ferons tomber z entre 4 & 12.

41° $z \gg 60$, $v \gg 20$, $x \gg \frac{11}{25}$, $z \gg \frac{56}{5}$, $y \gg \frac{92}{5}$. Les côtez z & y ainſi trouvez reſolvent la queſtion.

CINQUIE'ME EXEMPLE.

42° Pour partager $aa + bb \gg 64 + 16 \gg 80$ en trois quarrez parfaits zz, yy, xx, dont le premier zz ait ſon côté z entre 2 & 3, le ſecond yy ſon côté y entre 4 & 5, & le troiſiéme xx ſon côté x entre 7 & 8,

43° Nous écrirons d'abord les quarrez des limites données.

zz entre 4 & 9
yy entre 16 & 25
xx entre 49 & 64

44° *Quarrez rectifiez des limites données.*

zz entre 4 & 9
yy entre 16 & 21
xx entre 50 & 60

C'eſt-à-dire par extraction.

z entre 2 & 3

y entre 4 & $\frac{45826}{10000}$

x entre $\frac{70711}{10000}$ & $\frac{77460}{10000}$.

45° La deuxiéme propoſition fera tomber z entre 2 & 3. Elle permet de prendre $t' \propto 60$, $v' \propto 25$, ce qui fournira $x' \propto \frac{176}{845}$, $z \propto \frac{472}{169}$, $y' \propto \frac{476}{169} \propto a'$, $zz + y'y' \propto \frac{222784 + 206296}{28561} \propto 80 \propto aa + bb$.

46° Puiſque $y' \propto \frac{476}{169}$ & par conſequent $y'y' \propto \frac{206096}{28561}$, avec y' appellé $a' \propto \frac{476}{169}$ & $y'y'$ appellé $a'a' \propto \frac{206096}{28561}$; la premiere propoſition partagera $a'a'$ en deux quarrez parfaits, $z'z'$, $y'y'$, dont le premier $z'z'$ aura ſon côté z' entre γ 16 & γ 21.

47° $t' \propto 60$, $v' \propto 104$, $x' \propto \frac{1436}{11713}$, $z' \propto \frac{647636}{152269}$, $y' \propto \frac{86160}{11713}$.

48° Resolution du probleme. $z \gtrless \frac{472}{169} \gtrless \frac{425272}{152269}$, $y \gtrless \frac{647636}{152269}$, $x \gtrless \frac{86160}{11713} \gtrless \frac{1120080}{152269}$.

49° Examen. $zz + yy + xx \gtrless 1808362798\frac{4}{4} + 4943238849\frac{5}{6} + 1254579206400 \gtrless 80 \gtrless aa + bb$.

50° Et comme les côtez trouvez sont à peu prés tels que cy-dessous $z \gtrless \frac{27929}{10000}$, $y \gtrless \frac{42413}{10000}$, $x \gtrless \frac{73559}{10000}$, il paroît que le côté z tombe entre Υ 4 & Υ 9, le côté entre Υ 16 & Υ 21, le côté x entre Υ 50 & Υ 60 ; de sorte qu'à plus forte raison les limites prescrites sont bien observées.

Sixie'me Exemple.

51° Pour partager $aa + bb \gtrless 160000 + 90000$ en quatre quarrez parfaits zz, yy, xx, vv, les limites prescrites étant z entre 80 & 90, y entre 100 & 120, x entre 300 & 400, v entre 360 & 400

Quarrez des limites données.

zz entre 6400 & 8100
yy entre 10000 & 14400
xx entre 90000 & 160000
vv entre 129600 & 160000

520 *Quarrez rectifiez des limites données.*

$z\,z$ entre 6400 & 8100
$y\,y$ entre 10000 & 11700
$x\,x$ entre 90000 & 91700
$v\,v$ entre 138500 & 413600

530 De ſorte que par extraction il vienne

z entre 80 & 90

y entre 100 & à peu prés $\frac{1081665}{10000}$

x entre 300, & à peu prés $\frac{3028201}{10000}$

v à peu prés entre $\frac{3721559}{10000}$ & $\frac{3789459}{10000}$

540 Nous partagerons $a\,a + b\,b$ en deux quarrez parfaits $z\,z$ & $y'\,y'$ dont le premier $z\,z$ ait ſon côté z entre $\sqrt{}$ 6400 & $\sqrt{}$ 8100.

550 Secondement nous partagerons $y'\,y'$ en deux quarrez parfaits $z'\,z'$ & $'y'\,'y'$, dont le premier $z'\,z'$ ait ſon côté z' entre $\sqrt{}$ 10000 & $\sqrt{}$ 11700.

560 Troiſiémement nou partagerons $'y'\,'y'$ en deux quarrez parfaits $'z'\,'z'$ & $y'\,y'$ dont le premier $'z'\,'z'$ ait ſon côté $'z'$ entre $\sqrt{}$ 90000 & $\sqrt{}$ 91700.

570 Les valeurs trouvées de z, z', $'z'$ & y' ſeront celles de z, y, x, v.

580 Premierement donc, afin que z tombe entre 80 & 90, nous aurons recours à la deuxiéme propoſition. $t' \gg 1000$, $v' \gg 400$, $x' \gg \frac{23}{29}$, $z \gg \frac{2400}{29} \gg 82\frac{22}{29}$, $y' \gg \frac{14300}{29} \gg 493\frac{3}{29}$, que nous appellerons a'.

59° $zz + y'y' \mathrel{\text{Ø}} \frac{5760000 + 20\,4490000}{841}$

60° Le partage de $y'\,y' \mathrel{\text{Ø}} a'a'$ en deux quarrez parfaits $z'z'$ & $'y'\,'y'$, dont le premier $z'z'$ ait ſon côté z' entre ϒ 10000 & ϒ 11700 ſe fera la premiere propoſition. $t' \mathrel{\text{Ø}} 50$, $'v' \mathrel{\text{Ø}} 62$, $'x' \mathrel{\text{Ø}} \frac{17050}{1769}$, $z' \mathrel{\text{Ø}} \frac{184800}{1769}$, $'y' \mathrel{\text{Ø}} \frac{852500}{1769}$, que nous appellerons a'.

61° $z'z' + 'y'\,'y' \mathrel{\text{Ø}} \frac{34151040000 + 72675625000}{3129361} \mathrel{\text{Ø}} \frac{760607290000}{3129361} \mathrel{\text{Ø}} \frac{204490000}{841} \mathrel{\text{Ø}} a'a'$.

62o par la même propoſition nous partagerons $a'a'$ en deux quarrez parfaits $'z'\,'z'$ & $y'\,y'$ dont le premier $'z'\,'z'$ ait ſon côté $'z'$ entre ϒ 90000 & ϒ 91700. $t' \mathrel{\text{Ø}} 50$, $v' \mathrel{\text{Ø}} 104$, $x' \mathrel{\text{Ø}} \frac{44330000}{5889001}$, $'z' \mathrel{\text{Ø}} \frac{17723475000}{5889001}$, $y' \mathrel{\text{Ø}} \frac{2216500000}{5889001}$.

63° $'z''z' + y'\,y' \mathrel{\text{Ø}} \frac{3141215660756250000 + 4912872250000000000}{34680332778001} \mathrel{\text{Ø}} \frac{805408791075625000}{34680332778001} \mathrel{\text{Ø}} \frac{72675625000}{3129361} \mathrel{\text{Ø}} a'a'$.

$$\frac{2400}{29} \gg 82 \frac{}{29} \gg \frac{}{5889001}$$

$$y \gg \frac{184800}{1769} \gg 104 \frac{824}{1769} \gg \frac{615199200}{5889001}$$

$$x \gg \frac{1772347500}{5889001} \gg 300 \frac{5647200}{5889001}$$

$$v \gg \frac{2216500000}{5889001} \gg 376 \frac{22356\,4}{5889001}$$

65° Pour l'examen. Il eſt manifeſte que les quatre côtez trouvez z, y, x, v, tombent chacun entre les limites que l'on ſouhaitoit obſerver.

66° D'ailleurs il eſt aiſé de s'aſſeurer que les numerateurs des quarrez de ces mêmes côtez ſont

celuy de zz, le nombre 2375252280633600000
celuy de yy, le nombre 3784700556806400000
celuy de xx, le nombre 3141215660756250000
celuy de vv, le nombre 4912872250000000000
leur ſomme, 8670008319450025000000

67° Le dénominateur commun ſçavoir le quarré de 5889001, eſt. 34680332778001

68° De ſorte que $zz + yy + xx + vv \gg 250000 \gg aa + 66$, comme il falloit.

69° Ce peu d'exemples ſuffit pour enſeigner à partager un ou deux quarrez parfaits donnez en autant d'autres quarrez parfaits que l'on voudra, de maniere que chacun des quarrez cherchez ait ſon côté entre deux limites preſcrites qui ne renferment rien de contraire à la raiſon.

70 Quand il y aura plus de deux quarrez donnez, ſervez-vous de la methode ſuivante.

Suite infinie de reſolutions infinies.

71° Aprés avoir rectifié les limites données quand elles en auront beſoin, & rangé les côtez donnez de maniere que le premier ne ſoit pas moindre que le ſecond, ni celuy-cy que le troiſiéme, & de même en continuant ; obſervez ſi la ſomme des deux premiers quarrez donnez eſt ou non moindre ou moindre que le premier grand quarré rectifié des limites données.

72° Quand $aa + bb$ n'eſt pas moindre que le premier grand quarré rectifié des limites données, qu'avec cela $aa + bb + cc$ n'eſt pas moindre que la ſomme du premier & ſecond grand quarré rectifié des limites données, & ainſi de ſuite, de ſorte que la ſomme de tous les quarrez donnez ne ſoit pas moindre que celle de tous les grands quarrez rectifiez des limites données, excepté le dernier, ce ſera le premier cas. Quand il arrivera autrement, ce ſera le ſecond cas.

73° Pour reſoudre les problemes du premier cas. Partagez $aa + bb$ en deux quarrez parfaits zz & $y'y'$, dont le premier zz ait ſon côté z entre les limites de la premiere couple rectifiée. Enſuite partagez $y'y' + cc$ en deux quarrez parfaits $z'z'$ & $y''y''$, dont le premier $z'z'$ ait ſon côté z' entre les limites de la ſeconde couple rectifiée. Continuez de la même façon, juſques à ce que vous ayez fait autant de ſections, moins une, qu'il y aura de couples de limites rectifiées. Les côtez trouvez z avec le dernier y reſoudront la queſtion.

74° Pour éviter la multiplicité des regles, nous donnerons le moyen de ne tomber jamais ſur le ſecond cas. Ce moyen eſt facile ; puis qu'il n'y a

qu'à rectifier toûjours les limites données, en observant la seconde methode de la dixiéme proposition.

75° Que si les limites données, ou rectifiées par la premiere methode de la dixiéme proposition, s'accordant à la verité avec la table de la neuviéme proposition; nous font en même tems tomber sur le second cas; il n'y aura qu'à rectifier lesdites limites par la seconde methode; pour faire que la question tombe infailliblement sur le premier cas que le soixante-treiziéme numero de la proposition presente enseigne à resoudre.

76° Un seul exemple suffira. Qu'il faille partager la somme $f \supset 166$ des trois quarrez parfaits 81, 49, 36, ou si on l'aime mieux, des trois quarez parfaits 121, 36, 9, en trois autres quarrez parfaits, un desquels tombe entre 158 & 159, un autre entre 4 & 6, & un autre entre 2 & 5.

77° Selon la premiere methode de la dixiéme proposition, nous écrirons

Limites données.

M entre 158 & 159
N entre 4 & 6
O entre 2 & 5

Limites rectifiées.

M entre 158 & 159
N entre 4 & 5
O entre 2 & 4

79° Maintenant il est impossible de partager $aa + bb \supset 121 + 36 \supset 157$, en deux quarrez parfaits zz, $y'y'$, dont le premier zz soit entre

entre 158 & 159, puiſque la petite limite 158 ſurpaſſe $aa + bb \gtrless 157$, & cette impoſſibilité paroît par le troiſiéme numero de la dixiéme propoſition.

80 Nous écrirons donc, ſelon la ſeconde methode de ladite propoſition,

Limites données.

O entre 2 & 5
N entre 4 & 6
M entre 158 & 159

Limites rectifiées.

O entre $2\frac{1}{2}$ & 3
N entre $4\frac{1}{2}$ & 5
M entre 158 & 159

810 L'état de la queſtion eſt preſentement de trouver

zz entre $2\frac{1}{2}$ & 5
yy entre $4\frac{1}{2}$ & 5
xx entre 158 & 159

820 Rien ne ſauroit nous empêcher de partager $aa + bb \gtrless 121 + 36 \gtrless 157$ en deux quarrez parfaits zz, $y'y'$, dont le premier zz, ait ſon côté z entre $\gamma\ 2\frac{1}{2}$ & $\gamma\ 3$ & enſuite $y'y' + cc$ en deux autres quarrez parfaits $z'z'$ $y'y'$, dont le premier $z'z'$ ait ſon côté z' entre $\gamma\ 4\frac{1}{2}$ & $\gamma\ 5$, & il eſt viſible que les valeurs de z, z', y', ſeront celles de z, y, x.

RESOLUTION
des puiſſances cubiques.

PROBLEME PREMIER.

Chaſſer le ſecond terme d'une puiſſance propoſée.

PREMIERE METHODE.

1° SUppoſez que l'origine de la puiſſance propoſée égale la quantité *p* augmentée, quand le ſecond terme eſt négatif, ou diminuée, quand il eſt affirmatif, d'une partie du coëfficient du même ſecond terme dénommée par le nombre qui exprime le plus haut degré où l'origine monte dans la puiſſance propoſée. La ſubſtitution fournira ce que l'on cherche.

SECONDE METHODE.

2° Par le nombre qui exprime le plus haut degré où monte l'origine dans la puiſſance propoſée, diviſez la ſomme de *p* plus le coëfficient du ſecond terme, quand celuy-ci eſt negatif, ou celle de *p* moins le coëfficient du ſuſdit terme, quand celuy-ci eſt affirmatif. Suppoſez que l'origine de la puiſſance propoſée eſt égale au quotient. La ſubſtitution fournira une puiſſance préparée qu'il faudra multiplier par le plus grand dénominateur

qu'elle contienne, afin d'avoir la transformée que l'on cherche.

3° Au reſte tant ici que dans la ſuite, l'on ſuppoſe toûjours que l'on prend d'abord le ſoin de reduire à l'unité le coëfficient du premier terme de la puiſſance propoſée, quand ce coëfficient differe de l'unité.

EXEMPLE.

4° Qu'il faille chaſſer le ſecond terme de la puiſſance $z^4 - az^3 + bzz - cz + d \propto 0$.

5° Selon la premiere methode j'écris $z \propto p + \frac{1}{4}a$.

6° La ſubſtitution rend $p^4 * - \frac{3}{8}aapp + bpp - \frac{1}{2}a^3p - \frac{3}{256}a^4 \propto 0$, & cette équation n'a point de ſecond terme, comme l'on ſouhaitroit qu'il arrivât.

$+ \frac{1}{2}abp + \frac{1}{16}aab - cp - \frac{3}{4}ca + d$

7° Si l'on veut n'avoir point de fractions, ſoit $r \propto 4p$. Il en reſultera $r^4 * - 6aarr - 8a^3r - 3a^4 \propto 0$.

$+ 16brr + 32abr + 6aab - 64cr - 64ac + 256d$

8° Selon la ſeconde methode j'écris $z \propto \frac{1}{4}p + \frac{1}{4}a$.

9° De ceci reſulte $\frac{1}{256}p^4 * - \frac{3}{128}aapp - \frac{1}{32}a^3p - \frac{3}{256}a^4 + \frac{1}{16}pp + \frac{1}{8}abp + \frac{1}{16}aab - \frac{1}{4}cp - \frac{1}{4}ac + d \propto 0$.

10° La multiplication par 256 rend p^4
$* - 6aapp - 8a^3p - 3a^4$
$+ 16bpp + 32abp + 16aab$
$- 64cp - 64ac$
$+ 256d$

$\odot \hat{\theta}$; de sorte qu'une seule substition a resolu le probleme sans fractions, au lieu que la premiere methode n'a pû les éviter qu'en faisant une substitution de plus.

PROBLEME II.

Chasser le troisiéme terme d'une puissance proposée.

1° DIvisons la somme $p + q$, ou la difference $p - q$, par le nombre qui exprime le plus haut degré où l'origine monte dans la puissance proposée, & mettons le quotient au lieu de l'origine, par tout ou celle-ci se trouve.

2° Il en resultera une équation qu'il faudra multiplier par son plus grand dénominateur, afin d'avoir une préparée dont le troisiéme terme sera feint & égal à theta.

3° Cette fiction fournira une puissance du second degré d'où il sera facile de tirer deux valeurs de q dont il sera arbitraire de prendre celle que l'on voudra, pour la mettre dans la puissance préparée, par tout ou q se trouvera. Cette substitution produira ce que l'on vouloit trouver.

PREMIER EXEMPLE.

4° Chasser le troisiéme terme de la puissance $z^4 - 10zz + 12z - 60 \odot \hat{\theta}$.

5° Soit $z \propto \frac{1}{3} p + \frac{1}{3} q$.

6° Il viendra $\frac{1}{27} p^3 + \frac{1}{9} qpp + \frac{1}{9} qqp$
$- 1\frac{1}{9} pp - 2\frac{2}{9} qp$
$+ 4p$
$+ \frac{1}{27} q^3 \propto \theta$.
$- 1\frac{1}{9} qq$
$+ 4q$
$- 60$

7° La multiplication par 27 produit la puissance preparée $p^3 + 3qpp$
$- 30pp$
$+ 3qqp + q^3 \propto \theta$
$- 60qp - 30qq$
$+ 108p + 108q$
$- 1620$

8° J'écris $3qq - 60q + 108 \propto \theta$, qui se tire d'abord de $3qqp - 60qp + 108p \propto \theta$.

9° La division par 3 de $3qq - 60q + 108 \propto \theta$ rend $qq - 20q + 36 \propto \theta$,

10° d'où l'on tire deux valeurs de q, l'une 18, l'autre 2.

11° La supposition de $q \propto 18$ change la préparée en $p^3 + 24pp * - 3564 \propto \theta$.

12° Et si nous prenons $q \propto 2$, il viendra $p^3 - 24pp * - 1624 \propto \theta$, de sorte que le probleme est resolu en deux manieres, dont l'une prend $z \propto p + 18$, & l'autre $z \propto p + 2$.

EXEMPLE SECOND.

Chasser le troisiéme terme de la puissance $z^3 - 15zz + 71z - 105 \propto \theta$.

13° Premierement au lieu de z mettant $\frac{1}{3} p + \frac{1}{3} q$, il vient $\frac{1}{27} p^3 + \frac{1}{9} qpp$
$- \frac{5}{3} pp$

$+ \frac{x}{9}\ qqp + \frac{1}{27}\ q^3 \supset \theta.$
$- 3\frac{1}{3}\ qp - \frac{5}{3}\ qq$
$+ 23\frac{2}{3}\ p + 23\frac{2}{3}\ q$
$- 105$

140 La multiplication par 27 produit la préparée $p^3 + 3qpp + 3qqp + q^3$
$- 45\ pp - 90\ qp - 45\ qq$
$+ 639\ p + 639\ q$
$- 2835$
$\supset \theta.$

150 Le troiſiéme terme que l'on veut choiſir étant feint égal à theta rend $qq \supset 30\ q - 213$, d'où l'on tire $q \supset 15 \pm 2 \curlyvee 3$

160 Si l'on prend $q \supset 15 + 2 \curlyvee 3$, la transformée ſera $p^3 + 6 \curlyvee 3 \times pp^* - 48 \curlyvee 3 \supset \theta.$

170 La priſe de $q \supset 15 - 2 \curlyvee 3$ rend $p^3 - 6 \curlyvee 3 \times pp^* + 48 \curlyvee 3 \supset \theta.$

TROISIE'ME EXEMPLE.

Qu'il faille chaſſer le troiſiéme terme de $z^3 - 4zz + 14z - 20 \supset \theta.$

180 Soit $z \supset -\frac{x}{3}\ p + -\frac{x}{3}\ q.$

190 Il viendra pour preparée $p^3 + 3qpp - 12pp$
$+ 3qqp + q^3 \supset \theta.$
$- 244\ p - 12qq$
$+ 126\ p + 126\ q$
$- 540$

200 Du troiſiéme terme l'on tire $qq - 8q + 42 \supset \theta$, ce qui fournit $q \supset 4 \pm \curlyvee - 26$, & il eſt clair que ſi l'on vouloit faire la tranformation par l'une ou l'autre des deux valeurs de q, il en reſulteroit une puiſſance dont l'expreſſion ſeroit tout-à-fait incommode.

PROBLEME III.

Reſoudre la puiſſance
$z^3 * - bz - c \propto 0$.

1° PRenons trois racines inégales & réelles ; la premiere $- y + x$, la ſeconde $- y - x$, la troiſiéme $2y$, dont les deux premieres ſoient negatives, & la troiſiéme affirmative, que nous appellerons principale ou grande racine, parce que les deux autres ſont petites, en comparaiſon de cell-ci.

2° Otons les chacune de z, nous aurons trois reſtes. Le premier, $z + y - x \propto 0$; le ſecond, $z + y + x \propto 0$; le troiſiéme $z - 2y \propto 0$.

3° La multiplication du premier par le ſecond produit la quantité

$$zz + 2yz + yy \propto 0,$$
$$- xx$$

4° Ce qui étant multiplié par $z - 2y \propto 0$, il vient

5° $z^3 * - 3yyz - 2y^3 \propto 0$.
$- xxz + 2xxy$.

6° Le premier terme de cette équation eſt égal au premier de la propoſée, le ſecond de l'une au ſecond de l'autre, le troiſiéme au troiſiéme, & le qutriéme au quatriéme.

7° Les deux dernieres de ces égalitez fourniſſent l'une

$3yy + xx - b \propto 0$,

8° L'autre $2y^3 - 2xxy - c \propto 0$.

9° Le ſeptiéme numero rend ſi l'on veut

$3yy \propto b - xx$,

10° Ou si on l'aime mieux

$$xx \text{ ☌ } b - 3yy,$$

11° Et les deux numero precedens fourniront deux differends moyens de resoudre la puissance proposée.

12° La substitution du dixiéme dans le huitiéme produit

$$8y^3 * - 2by - c \text{ ☌ } 0.$$

13° La huitiéme partie de ceci fait

$$y^3 * - \tfrac{1}{4} by - \tfrac{1}{8} c \text{ ☌ } 0.$$

14° La multiplication du septiéme par $\frac{x}{3}$ y produit

$$y^3 * + \tfrac{1}{3} xxy \text{ ☌ } 0.$$
$$- \tfrac{x}{3} by$$

15° La multiplication des deux precedens numero par 24 produit

$$24y^3 * - 6by - 3c \text{ ☌ } 0,$$

16° Et $24y^3 * + 8xxy * \text{ ☌ } 0.$
$$- 8by$$

17° L'excés de l'un par dessus l'autre fait $2by - 8xxy - 3c$ ☌ 0;

18° D'où l'on tire y ☌ $\dfrac{3c}{2b - 8xx}$

19° Dont le double est la racine principale $2y$ ☌ $\dfrac{3c}{b - 4xx}$;

20° Laquelle demande $4xx$] b, & par extraction x] $\frac{1}{2}$ ϒ b.

21° La substitution du dix-huitiéme dans le septiéme rend

$$64x^6 - 96bx^4 + 36bbxx \text{ ☌ } 4b^3 - 27cc.$$

22° De cette égalité l'extraction tire ou $8x^3 - 6bx$ ☌ ϒ $4b^3 - 27cc$;

23° Ou

23° Ou $6bx - 8x^3 \gtrless \sqrt{4b^3 - 27cc}$;

24° Et ces deux équations demandent chacune $4b^3 [27cc$, afin que la quantité x soit réelle, ce qui fait le premier cas.

25° Le vingt-deuxiéme numero demande $8x^3 [6bx$, & par conſequent $4cx [3b$, ce que le vingtiéme ne permet pas.

26° Il reſte le vingt troiſiéme, auquel rien ne s'oppoſe.

27° Il ſignifie la même choſe que $8x^3 - 6bx + \sqrt{4b^3 - 27cc} \gtrless 0$.

28° Le ſeptiéme demande $3yy] b$. Ainſi $yy] \frac{1}{3}b$ & $y] \sqrt{\frac{1}{3}b}$.

29° Le huitiéme demande $y^3 [\frac{c}{2}$, & ainſi $y [\sqrt[3]{\frac{c}{2}}$.

30° Le treiziéme demande $y^3 [\frac{1}{4}by$; c'eſt pourquoy $yy [\frac{1}{4}b$, & $y [\frac{1}{2}\sqrt{b}$.

31° Le treiziéme demande pareillement $y^3 [\frac{c}{2}$, & ainſi $y [\frac{1}{2}\sqrt[3]{c}$ que le vingt-neuviéme rend ſuperflu.

32° Le dix huitiéme rend $y [\frac{3c}{2b}$, ce que le vingt-neuviéme rend auſſi ſuperflu. Car ſi nous écrivons $\frac{3c}{2b}] \sqrt[3]{\frac{1}{2}c}$, il en reſultera d'abord $\frac{27c^3}{8b^3}] \frac{1}{2}c$, enſuite $\frac{27cc}{4b^3}] 1$, & enfin $4b^3 [27cc$, ce que le vingt-quatriéme demande.

33° L'accord du vingt-huitiéme & du vingt-neuviéme demande pareillement $4b^3 [27cc$.

Second cas, dans lequel $4b^3 \gtrless 27cc$.

340 La lettre x peut être non seulement ou réelle, ou imaginaire, mais auſſi égale à theta.

350 Dans ce cas qui ſuppoſe $x \gtrless \theta$, le premier membre du vingt & uniéme numero devient égal à rien, & afin que le ſecond s'évanouïſſe, il faut que la quantité $4b^3$ égale $27cc$.

360 Alors le ſeptiéme numero rend $3yy \gtrless b$,

370 Et ſelon le huitiéme $2y^3 \gtrless c$.

380 De cette façon $yy \gtrless \frac{1}{3}b$, & $y^3 \gtrless \frac{1}{2}c$,

390 D'où il reſulte $4b^3 \gtrless 27cc$, comme il falloit.

400 Ainſi les racines ſont, la premiere, $-y \gtrless -\sqrt[3]{\frac{1}{3}b} \gtrless -\sqrt[3]{\frac{1}{2}c}$; la ſeconde, $-y \gtrless -\sqrt[3]{\frac{1}{3}b} \gtrless -\sqrt[3]{\frac{1}{2}c}$; la troiſiéme, $2y \gtrless 2\sqrt[3]{\frac{1}{3}b} \gtrless 2\sqrt[3]{\frac{1}{2}c}$.

410 L'on peut trouver la même reſolution en prenant pour racines $-y, -y, 2y$.

420 Car ſi l'on multiplie $z + y \gtrless \theta$ par $z + y \gtrless \theta$ & le produit $zz + 2yz + yy \gtrless \theta$ par $z - 2y \gtrless \theta$, il en reſultera

$z^3 * - 3yyz - 2y^3 \gtrless \theta$, d'où nous tirerons d'abord $3yy \gtrless b$ & $2y^3 \gtrless c$ comme nous avions tout-à-l'heure.

Troiſiéme cas, dans lequel $4b^3] 27cc$.

430 Prenons pour petites racines deux imaginaires negatives, l'une $-y + \sqrt{-xx}$, l'au-

tre $— y — \Upsilon — xx$, avec une principale affirmative $2y$.

44° Ainſi $z + y — \Upsilon — xx \mathrel{\text{Ↄ}} \theta$, $z + y + \Upsilon — xx \mathrel{\text{Ↄ}} \theta$ & $z — 2y \mathrel{\text{Ↄ}} \theta$ & le produit $zz + 2yz + yy + xx$ des deux premieres égalitez multiplié par la troiſiéme rend

$$z^3 * — 3yyz — 2y^3 \mathrel{\text{Ↄ}} \theta^4 + xxz — 2xxy.$$

45° Enſuite $3yy — xx — b \mathrel{\text{Ↄ}} \theta$,

46° Et $2y^3 + 2xxy — c \mathrel{\text{Ↄ}} \theta$.

47° Le quarante-cinquiéme numero rend $3yy \mathrel{\text{Ↄ}} xx + b$, ſi l'on veut ;

48° Ou ſi on l'aime mieux, $xx \mathrel{\text{Ↄ}} 3yy — b$.

49° La ſubſtitution de ce numero dans le quarante-ſixiéme rend $8y^3 * — 2by — c \mathrel{\text{Ↄ}} \theta$.

50° Le quarante ſeptiéme numero rend $3yy [b$, & ainſi $yy [\frac{1}{3} b$; d'où reſulte $y [\Upsilon \frac{1}{3} b$.

51° Le quarante-ſixiéme demande $y^3] \frac{1}{2} c$, & par conſequent $y] \Upsilon^3 \frac{1}{2} c$.

52° L'accord des deux derniers demande $4b^3] 27cc$, comme nous voulions, pour le troiſiéme cas.

53° Le quarante-neuviéme demande $y^3 [\frac{7}{8} c$, de ſorte que, par extraction, $y^3 [\frac{1}{2} \Upsilon^3 c$.

54° Le quarante-cinquiéme multiplié par y rend

$$24y^3 * — 8xxy * \mathrel{\text{Ↄ}} \theta. — 8by$$

55° Le triple du quarante-neuviéme eſt $24y^3 * — 6by — 3c \mathrel{\text{Ↄ}} \theta$.

56° La difference des deux precedens numero, ſçavoir $— 8xxy — 2by + 3c \mathrel{\text{Ↄ}}$

57° rend $y \mathrel{\text{Ↄ}} \frac{3c}{8xx + 2b}$,

58° Ce qui rend $y] \frac{3c}{2b}$.

59° Le numero precedent eſt ſuperflu. Car ſi nous écrivons $\frac{3c}{2b} [\sqrt{}^3 - \frac{x}{2} c$, & calculons comme au trente-deuxiéme numero, il en reſultera $4b^3] 27cc$, comme le cinquante-deuxiéme le preſcrivoit.

60° La ſubſtitution du cinquante-ſeptiéme dans le quarante cinquiéme produit $64x^6 + 96bx^4 + 36bbxx \gg 27cc - 4b^3$.

61° L'extraction rend

$$8x^3 * + 6bx \gg \sqrt{27cc - 4b^3},$$

62° Et l'on void encore la neceſſité d'avoir $4b^3 \quad 27cc$

63° Le ſoixante & uniéme ſe peut écrire $8x^3 * + 6bx - \sqrt{27cc - 4b^3} \gg 0$,

64° Et demande $8x^3] \sqrt{27cc - 4b^3}$,

65 Ou $6bx] \sqrt{27cc - 4b^3}$.

66° Celuy-là ſignifie par extraction $x] \frac{1}{2} \sqrt{}^c \sqrt{27cc - 4b^3}$,

67° Le ſoixante-cinquiéme, que $x] \frac{1}{6b} \sqrt{}$

$\sqrt{27cc - 4b^3}$

68° Celle que l'on voudra des deux limites que nous avons marquées aux deux derniers numero ſuffira pour trouver par approximation la quantité de x ſelon le ſoixantiéme numero.

69° Si l'on ſouhaite avoir encore d'autres limi-

tes, mettons m au lieu de $2x$ dans le ſoixante-troiſiéme numero.

700 Il viendra $m^3 * + 3bm - \sqrt{27cc - 4b^3} \propto 0$.

710 Pour reſoudre cette équation, prenons deux racines imaginaires negatives, l'une $-p + \sqrt{-qq}$, l'autre $-p - \sqrt{-qq}$, avec une troiſiéme ou principale réelle & affirmative $2p$.

720 Nous aurons $m + p - \sqrt{-qq} \propto 0$, $m + p + \sqrt{-qq} \propto 0$ & $m - 2p \propto 0$.

730 Ainſi $m^3 * - 3ppm - 2p^3 \propto 0$.
$+ qqm - 2pqq$

740 $3pp - qq + 3b \propto 0$.

750 $2p^3 + 2pqq - \sqrt{27cc - 4b^3} \propto 0$.

760 $qq \propto 3pp + 3b$.

770 $8p^3 * + 6bp - \sqrt{27cc - 4b^3} \propto 0$.

780 $p \propto \dfrac{3\sqrt{27cc - 4b^3}}{8qq - 6b}$

790 $64q^6 - 288bq^4 + 324bbqq \propto 729cc$.

800 L'extraction rend $8q^3 - 18bq \propto 27c$,

810 Et non pas $18bq - 8q^3 \propto 27c$ parce que le ſeptante-ſixiéme numero veut que $qq [3b$, & que par conſequent $8qq [24b$, de ſorte que $8q^3 [24bq$, & qu'à plus forte raiſon $8q^3 [18bq$.

820 Dans le quatre-vingtiéme mettons q'' au lieu de $2q$.

830 Nous aurons $q''^3 * - 9bq'' - 27c \propto 0$.

840 Cette équation appartient au troiſiéme cas de la forme $z^3 * - bz - c \propto 0$, lequel nous traitons preſentement.

850 Car au lieu qu'auparavant nous avions $4b^3] 27cc$, nous devons écrire presentement $2916b^3] 19683cc$, à cause du quatre-vingt-troisiéme numero, à l'égard duquel quatre fois le cube de la quantité $9b$, lequel quadruple fait $2916b^3$, doit être au dessous de vingt-sept fois le quarré de $27c$, c'est-à-dire au dessous de $19683cc$, parce que selon la regle de proportion directe, comme la quantité $4b^3$ est à $27cc$, ainsi la quantité $2916b^3$ est à $19683cc$.

860 A present nous trouverons facilement les limites de q' pour resoudre le quatre-vingt-troisiéme numero. Car ce qu'étoit auparavant la racine principale $2y$ peut être ici representé par la valeur de q' qui fait la principale dans son équation; au lieu de b, nous avons $9b$, & au lieu de c, la quantité $27c$.

870 Par le cinquante & uniéme $2y] \sqrt[3]{4c}$; ainsi presentement $q'] \sqrt{108c}$.

880 Par le cinquante-troisiéme $2y [\sqrt[3]{c}$; ainsi presentement $q' [\sqrt[3]{27c}$.

890 Par le cinquantiéme $2y [\sqrt{-\frac{4}{3}b}$; ainsi presentement $q [\sqrt{12b}$.

900 Par le quatre-vingt-deuxiéme $q \gg -\frac{1}{2}q'$. C'est pourquoy les trois numero precedens nous obligent de reconnoître que $q] -\frac{1}{2} \sqrt[3]{4c}$,

910 Que $q [-\frac{3}{2} \sqrt[3]{c}$,

920 Et que $q [\sqrt{3b}$.

930 De plus par le septante-huitiéme la racine principale du septantiéme, savoir

m (ou $2p$) vaut $\frac{3 \sqrt{27cc - 4b^3}}{4qq - 3b}$, pourvû que par m nous entendions cette valeur de m qui fait la prinpale racine de son équation.

940 Le nonantiéme rend $499] 9 \Upsilon^3 16cc$.

950 Par le nonante & uniéme $499 [9 \Upsilon^3 cc$.

960 Par le nonante-deuxiéme $499 [12 b$.

970 Soit Φ quantité changeante, grande ou petite, ſelon qu'il ſera à propos. Les trois numero precedents produiront par ce moyen les trois qui ſuivent.

980 Le premier, que $499 \mathfrak{D} - \Phi + \Upsilon 16cc$;

990 Le ſecond, que $499 \mathfrak{D} \varphi + 9 \Upsilon^3 cc$;

1000 Le troiſiéme, que $499 \mathfrak{D} \varphi + 12 b$.

1010 La ſubſtitution de ces trois numero dans le quatre-vingt-treziéme produit les trois qui ſuivent.

1020 $$m \mathfrak{D} \frac{3 \Upsilon \overline{27cc - 4b^3}}{-\Phi - 3b + \Upsilon^3 16cc};$$

1030 $$m \mathfrak{D} \frac{3 \Upsilon \overline{27cc - 4b^3}}{\varphi - 3b + 9 \Upsilon^3 cc}.$$

1040 $$m \mathfrak{D} \frac{3 \Upsilon \overline{27cc - 4b^3}}{\Phi + 9b}.$$

1050 De ces trois équations on tire d'abord trois limites,

1060 La premiere, $$m [\frac{\Upsilon \overline{27cc - 4b^3}}{-b + 3 \Upsilon^3 16cc};$$

1070 La ſeconde $$m] \frac{\Upsilon \overline{27cc - 4b^3}}{-b + 3 \Upsilon^3 cc},$$

108° La troiſiéme, m] $\frac{\sqrt{27cc - 4b^3}}{3b}$,

qui revient au ſoixante-ſeptiéme numero, de ſorte qu'ici nous ne trouvons que deux nouvelles limites.

109° Au lieu du cent ſixiéme on peut écrire

$$m \left[\frac{\sqrt{27cc - 4b^3}}{-b + 6\sqrt[3]{2cc}}. \right.$$

110° Le quarante neuviéme rend bien $4yy [b$; & par extraction $2y . [\sqrt{b}$, ou $y [\frac{1}{2}\sqrt{b}$, ou $y [\sqrt{\frac{1}{4}b}$; mais cette limite eſt ſuperfluë à cauſe du cinquantiéme numero.

Autrement pour le premier cas.

111° La puiſſance propoſée rend

$$z^3 - bz \gtrless c.$$

112° Quarrant il vient

$$z^6 - 2bz^4 + bbzz \gtrless cc$$

113° Dans celle-ci ſoit $zz \gtrless b$. Le premier membre deviendra b, ce qui ne fait pas aſſez.

114° Soit $zz \gtrless \frac{1}{2}b$, il en reſultera $\frac{1}{4}b^3 \gtrless cc$, & ainſi $4b^3 \gtrless 27cc$, de ſorte que $\frac{1}{2}b$ fait trop, puiſque le premier cas ſuppoſe $4b^3 [27cc$.

115° Les deux numero precedents mettent zz entre b & $\frac{1}{4}b$.

116° Soit $zz \gtrless b$, le premier membre deviendra b, ce qui n'eſt pas aſſez, au lieu que $\frac{1}{4}b$ faiſoit trop;

117° De ſorte qu'il y a une valeur de z entre $\frac{1}{2}b$ & b.

118° Soit

118° Soit $zz \gtrless \frac{4}{3} b$, il viendra $\frac{8}{27} b^3 \gtrless cc$, ou $4b^3 \gtrless 27cc$, de sorte que $\frac{4}{3} b$ fait trop, au lieu que b faisoit trop peu ;

119° Et ceci montre qu'il y a une valeur de zz entre b & $\frac{4}{3} b$.

120° Nous avons découvert par ce calcul les limites des trois valeurs de ζz qui ne sauroit avoir plus de trois valeurs, parce que le cent douziéme numero ne contient qu'une équation cubique. Car si au lieu de zz nous y mettons p, il viendra

$$p^3 - 2bpp + bbp \gtrless cc.$$

121° Il paroît que z a trois valeurs, la premiere, entre 0 & $\pm \sqrt{\frac{1}{3}} b$; la seconde entre $\pm \sqrt{\frac{1}{3}} b$ & $\pm \sqrt{b}$; la troisiéme entre $\pm \sqrt{b}$ & $\pm \sqrt{\frac{4}{3}} b$.

122° Que si la somme des deux premieres nie autant que la troisiéme affirmera, nous aurons

123° $-y + x$ entre $-\sqrt{\frac{1}{3}} b$ & 0,
$-y - x$ entre $-\sqrt{b}$ & $-\sqrt{\frac{1}{3}} b$,
$2y$ entre $\sqrt{b}$ & $\sqrt{\frac{4}{3}} b$.

124° La somme des trois racines fera 0, pour le second terme de la puissance composée que l'on en formera & qui sera la même que la proposée ; de sorte qu'il ne nous manque rien à l'égard des limites de la forme

$$\zeta^3 * - b\zeta - c \gtrless 0, \text{ quand } 4b^3 [27cc.$$

Du troisiéme cas par la methode que l'on attribuë d'ordinaire à Cardan.

125° Dans la proposée $z^3 * - bz - c \gtrless 0$,

mettons $\frac{3yy + b}{3y}$ au lieu de z.

126° Il viendra $27\bar{y}^6 - 27c\bar{y}^3 + b^3 \propto 0$.

127° Ceci étant diviſé par 27, il vient $y^6 - c\bar{y}^3 + \frac{1}{27}b^3 \propto 0$.

128° Mettons $\bar{x}$ au lieu de $\bar{y}^3$. Il viendra

129° $\bar{x}\bar{x} - c\bar{x} + \frac{1}{27}b^3 \propto 0$, ce qui eſt une équation du ſecond degré dont la reſolution fournit

130° $\bar{x} \propto \frac{1}{2}c + \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{27}b^3}$, pour la grande valeur de $\bar{x}$,

& $\bar{x} \propto \frac{1}{2}c - \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{27}b^3}$, pour la petite.

131° Le produit de ces deux valeurs multipliées l'une par l'autre, eſt $\frac{1}{27}b^3$, ce qui fait le troiſiéme terme de l'équation du cent vingt-ſeptiéme numero.

132° Il eſt clair que l'une & l'autre de ces deux valeurs demandent $\frac{1}{4}cc$ [$\frac{1}{27}b^3$ & par conſequent $4b^3$] $27cc$, afin que tout ſoit réel, ce qui convient au troiſiéme cas.

133° Remettons $\bar{y}^3$ au lieu de $\bar{x}$ dans les cent trentiéme & cent trente & uniéme. Il viendra

134° $\bar{y}3 \propto \frac{1}{2}c + \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{27}b^3}$ &

135° $\bar{y}^3 \propto \frac{1}{2}c - \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{27}b^3}$.

136° L'extraction cubique fournit

$\bar{y} \propto \sqrt[3]{\frac{1}{2}c + \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{27}b^3}}$, pour la grande valeur de $\bar{y}$, &

137° $\bar{y} \propto \sqrt[3]{\frac{1}{2}c - \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{27}b^3}}$ pour la petite.

138° Par le cent vingt-cinquiéme numero z contient les deux quantitez $\bar{y}$ & $\frac{b}{3\bar{y}}$ ajoûtées en une ſomme.

139° Pour la valeur de $\bar{y}$ ſuivons le cent trente-quatriéme ou le cent trente-cinquiéme numero. Nous avons le choix.

140° Nous ſuivrons le cent trente-quatriéme.

141° Nous aurons par ce moyen $\zeta \mathfrak{D}$

$$\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}c + \sqrt{\tfrac{1}{4}cc - \tfrac{1}{27}b^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{3\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}c + \sqrt{\tfrac{1}{4}cc - \tfrac{1}{27}b^3}}}}.$$

142° Pour faire évanouïr cette fraction incommode, prenons le tiers du diviſeur

$$3\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}c + \sqrt{\tfrac{1}{4}cc - \tfrac{1}{27}b^3}}$$

143° Par trois il faudra auſſi diviſer b.

144° Le diviſeur préparé ſera

$$\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}c + \sqrt{\tfrac{1}{4}cc - \tfrac{1}{27}b^3}}$$

145° Le dividende preparé $\frac{1}{3}b$.

146° Multiplions cubiquement l'un & l'autre, & mettre devant le quotient le ſigne $\sqrt{}$.

147° Il arrivera que par

$\frac{1}{2}c + \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{27}b^3}$ il faudra diviſer $\frac{1}{27}b^3$. L'operation rendra $\sqrt[3]{}$.

148° $-\frac{1}{2}c - \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{27}b^3}$ pour quotient, ou valeur de la fraction qui paroiſſoit incommode au cent quarante-uniéme numero.

149° Il eſt clair que ſelon le cent trente &

uniéme, diviſant $\frac{1}{27} b^3$ par $\frac{1}{2} c + \sqrt{\frac{1}{4} cc - \frac{1}{27} b^3}$ le quotient doit être ſans calcul, $\frac{1}{2} c - \sqrt{\frac{1}{4} cc - \frac{1}{27} b^3}$.

150° Les neuf precedens numero font comprendre que $z \propto \sqrt[3]{\frac{1}{2} c + \sqrt{\frac{1}{4} cc - \frac{1}{27} b^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} c - \sqrt{\frac{1}{4} cc - \frac{1}{27} b^3}}$,

151° Et il eſt conſtant que ceci fait la valeur principale de z, c'eſt-à-dire celle de ay, puiſque ce cas n'a qu'une ſeule racine réelle, laquelle eſt toûjours affirmative, les deux autres étant imaginaires negatives.

152° La moitié, ſavoir $y \propto$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2} c + \sqrt{\frac{1}{4} cc - \frac{1}{27} b^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} c - \sqrt{\frac{1}{4} cc - \frac{1}{27} b^3}}.$$

153° Le cent quarante-huititiéme fera trouver x, & le quarante-troiſiéme découvrira les valeurs des deux racines imaginaires negatives.

154° Du cent trente & uniéme il s'enſuit que diviſant la quantité $\frac{1}{2} b^3$ par $\frac{1}{2} c + \sqrt{\frac{1}{4} cc - \frac{1}{27} b^3}$, le quotient eſt $\frac{1}{2} c - \sqrt{\frac{1}{4} cc - \frac{1}{27} b^3}$, & que diviſant la même quantité $\frac{1}{27} b^3$ par $\frac{1}{2} c - \sqrt{\frac{1}{4} cc - \frac{1}{27} b^3}$ le quotient eſt $\frac{1}{2} c + \sqrt{\frac{1}{4} cc - \frac{1}{27} b^3}$ & il ne ſera pas difficile de trouver la même valeur de z que nous avons trouvée, ſi l'on prend $\bar{y} \propto \sqrt[3]{\frac{1}{2} c - \sqrt{\frac{1}{4} cc - \frac{1}{27} b^3}}$.

155° Au reſte ſi l'équation propoſée eſt numerique, & que par le cent cinquantiéme numero la valeur principale de z ne differe que de quelques

particules d'un nombre entier, il faudra examiner, par une ſubſtitution faite dans la puiſſance propoſée, ſi ce nombre entier dont z ſemble extrémement approcher, n'eſt pas la valeur même de z principale ou réelle.

Reſolution du premier cas où $4b^3 [27cc.$

METHODE PREMIERE.

$\sqrt{\frac{4}{3}b}; n [rb; n [2 \sqrt{\frac{1}{2}c} n^3 * - bn - c \rangle 0. y \rangle \frac{1}{2} n.$

$x \rangle \sqrt{b - 3yy}. \quad z \rangle -y + x.$

$z \rangle -y - x. \quad z \rangle 2y$ Trois racines réelles. Les deux premieres nient ; la troiſiéme affirme.

METHODE SECONDE.

$m [0 ; m] \sqrt{b}; m * - 3bm + \sqrt{4b^3 - 27cc} \rangle 0. x \rangle \frac{1}{2} m. y \frac{1}{3} b - \frac{3c}{2b - 8xx}$

$\frac{1}{3} x x \rangle \frac{3c}{2b - 8xx}.$

Les racines, comme auparavant.

TROISIE'ME METHODE.

$-y - x$ entre $-\sqrt{\frac{1}{3}b}$ & $-\sqrt{b}.$

$-y + x$ entre $-\sqrt{\frac{1}{3}b}$ & $0.$

$2y$ entre $\sqrt{b}$ & $\sqrt{\frac{4}{3}b}$ Les racines, ou valeurs de z, comme auparavant.

Reſolution du ſecond cas où $4b^3 \rangle 27cc.$

$z \rangle -\sqrt{\frac{1}{3}b} \rangle -\sqrt{\frac{1}{2}c}.$

$z \gtrless - \sqrt[3]{\frac{1}{2}b} \gtrless - \sqrt[3]{\frac{1}{2}c}.$
$z \gtrless 2\sqrt[3]{b} \gtrless 2\sqrt[3]{\frac{1}{2}c}$

Resolution du troisiéme cas, où $4b^3] 27cc.$

METHODE PREMIERE.

$n] 2\sqrt[3]{\frac{1}{2}c}; n [\sqrt[3]{c}; n [\sqrt{\frac{4}{3}b};$
$u^3 * - bn - c \gtrless 0.\quad y \gtrless \frac{1}{2}n.$

$x \gtrless \sqrt{3yy - b}.\quad z \gtrless -y + \sqrt{-xx}.$
$x \gtrless -y - \sqrt{-xx}.\quad z \gtrless 2y.$

Les deux premieres racines sont imaginaires negatives. La troisiéme est réelle affirmative.

METHODE DEUXIE'ME.

$$m] \sqrt[6]{27cc - 4b^3};\ m [1;$$
$$m] \frac{1}{3b} \sqrt{27cc - 4b^3};$$
$$m [\frac{\sqrt{27cc - 4b^3}}{-b + 6\sqrt[3]{2cc}};$$
$$m] \frac{\sqrt{27cc - 4b^3}}{-b + 3\sqrt[3]{cc}};$$
$$m^3 * + 3bm - 0 \gtrless 27cc - 4b$$
$$0 \gtrless 0.\qquad x \gtrless \tfrac{1}{2}m.$$
$$y \gtrless \sqrt{\tfrac{1}{3}b + \tfrac{1}{3}xx} \gtrless \frac{3c}{8xx + 2b}.$$

Les racines comme auparavant.

METHODE TROISIE'ME.

$s \propto \sqrt[3]{\frac{1}{2}c + \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{27}b^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}c - \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{27}b^3}}$.

$y \propto \frac{1}{2}n$. $x \propto \sqrt{3yy - b}$.
$z \propto -y + \sqrt{-xx}$. $z \propto -y - \sqrt{-xx}$. $z \propto 2y$. Les racines comme auparavant.

PROBLEME IV.

Resoudre la puissance
$z^3 * - bz + c \propto 0$.

1° POur le premier cas, où $4b^3 < 27cc$, soient trois racines réelles & inégales, deux qui affirment, $y + x$ & $y - x$, avec une troisiéme ou principale negative, savoir $-2y$.

2° Multiplions $z - y - x \propto 0$ par $z - y + x \propto 0$ & le produit

$zz - 2yz + yy \propto 0$ par $-xx$

$z + 2y \propto 0$. Il viendra

3° $z^3 * - 3yyz + 2y^3 \propto 0$
$-xxz - 2xxy$

4° Ainsi $3yy + xx, -b \propto 0$.

5° Et $2y^3 - 2xxy - c \propto 0$;

6° L'un & l'autre comme nous l'avions au premier cas du probleme precedent.

7° Ayant recours au cent vingt & uniéme numero du même probleme, nous pourrons limiter, en plaçant les trois racines cherchées,

8° La premiere entre ∞ & $\gamma \frac{1}{3} b$;
La seconde entre $\gamma \frac{1}{3} b$ & γb;
La troisiéme entre $- \gamma \frac{1}{3} b$ & $- \gamma b$.

9° Pour le second cas, où $x \supset \theta$,

10° Le quatriéme numero fournit $3yy \supset b$;

11° Le cinquiéme rend $2y^3 \supset c$,

12° L'un & l'autre comme au second cas du susdit probleme.

13° Si par le même cas, où $4b^3 \supset 27cc$, nous prenons deux racines affirmatives, réelles & égales, l'une y, l'autre y, & une troisiéme, ou principale, negative $-2y$;

14° Il viendra $z^3 * - 3yyz + 2y \supset \theta$,

15° D'où l'on tirera $3yy \supset b$ & $2y^3 \supset c$, comme nous avions il y a un moment.

16° Pour le troisiéme cas, où $4b^3] 27cc$; nous prendrons deux racines imaginaires affirmatives, l'une $y + \gamma - xx$, l'autre $y - \gamma - xx$, avec une troisiéme $-2y$ réelle negative.

17° La multiplication de $z - y - \gamma - xx \theta$ par $z - y + \gamma - xx \supset \theta$ produit

$$zz - 2yz + yy \supset \theta, \text{ \& ceci}$$
$$+ xx$$

étant multiplié par $z + 2y \supset \theta$, il viendra

18° $z^3 * - 3yyz + 2y^3 \supset \theta$
$+ xxz + 2xxy$

19° Ainsi $3yy - xx - b \supset \theta$

20° Et $2y^3 + 2xxy - c \supset \theta$,

21° L'un & l'autre comme nous avions au troisiéme cas du probleme precedent.

22° Nous avons donc trois cas & toute la suite du calcul la même qu'auparavant.

23° Cependant la dénomination des racines est contraire, ce qui change en affirmées celles qui nioient

Resolution

nioient au probleme precedent, & en negatives celles qui affirmoient.

Resolution du premier cas, où $4b^3 [27cc$.

PREMIERE METHODE.

$n] \sqrt{\frac{4}{3}b}; n [\sqrt{b}; n [2\sqrt[3]{\frac{1}{2}c};$
$n^3 * - bn - c \gtrless 0.$
$y \gtrless \frac{1}{2}n. x \sqrt{b} - 3 : y.$
$z \gtrless y + x, z \gtrless y - x,$
$z \gtrless - 2y.$ Trois racines réelles. Les deux premieres affirment. La troisiéme nie.

SECONDE METHODE.

$m [0; m] \sqrt{b}; m^3 * - 3bm + \sqrt{4b^3 - 27cc} \gtrless 0. x \gtrless \frac{1}{2}m.$

$y \gtrless \sqrt{3b - \frac{3}{4}xx} \gtrless \frac{3c}{2b - 8xx}.$ Les racines comme auparavant.

TROISIE'ME METHODE.

$y + x$ entre $\sqrt{\frac{1}{3}b}$ & $\sqrt{b}$.
$y - x$ entre $\sqrt{\frac{1}{3}b}$ & 0
$- 2y$ entre $- \sqrt{b}$ & $- \sqrt{\frac{4}{3}b}$.
$z^3 * - bz - c \gtrless 0$ Les racines comme auparavant.

Resolution du second cas, où $4b^3 \gtrless 27cc$.

$z \gtrless \sqrt{\frac{4}{3}b} \gtrless \sqrt[3]{\frac{1}{2}c}.$
$z \gtrless \sqrt{\frac{1}{3}b} \gtrless \sqrt[3]{\frac{1}{2}c}.$

$z \supset -2\sqrt[3]{\frac{1}{2}b} \supset -2\sqrt[3]{\frac{1}{2}c}$.

Trois racines réelles. Les deux premieres affirment. La troiſiéme nie.

Reſolution du troiſiéme cas, où $4b^3] 27cc$.

PREMIERE METHODE.

$n] 2\sqrt[3]{\frac{1}{2}c}$; $n [\sqrt[3]{c}$; $n [\sqrt[4]{b}$;

$n^3 * - bn - c \supset 0$. $y \supset \frac{1}{2}n$.

$x \supset \sqrt{3yy - b}$. $z \supset y + \sqrt{-xx}$.

$z \supset y - \sqrt{-xx}$, $z \supset -2y$.

Deux racines imaginaires affirmatives & une réelle negative.

METHODE SECONDE.

$$m] \sqrt[6]{27cc - 4b^3},$$

$$m] \frac{1}{3b} \sqrt{27cc - 4b^3},$$

$$m [\frac{\sqrt{27cc - 4b^3}}{-b + 6\sqrt{3}\,2cc},$$

$$m] \frac{\sqrt{27cc - 4b^3}}{-b + 3\sqrt{3}\,cc},$$

$$m^3 * + 3bm - \sqrt{27cc - 4b^3} \supset 0.$$

$x \supset \frac{1}{2}m$. $y \supset \sqrt{\frac{1}{3}b + \frac{1}{3}xx} \supset \frac{3c}{8xx + 2b}$. Les racines comme auparavant.

METHODE TROISIE'ME.

$$n \text{ ☌ } \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}c + \sqrt{\tfrac{1}{4}cc - \tfrac{1}{27}b^3}} + \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}c - \sqrt{\tfrac{1}{4}cc - \tfrac{1}{27}b^3}}.$$

y ☌ $\frac{1}{2}n$. x ☌ $\sqrt{3yy - b}$.

Les racines comme auparavant.

PROBLE'ME V.

Reſoudre la puiſſance

$z^3 * + bz - c$ ☌ 0.

1° SI l'on prend trois racines réelles, dont les deux premieres $-y + x$ & $-y - x$ ſoient negatives & la troiſiéme $2y$ affirmative.

2° Nous aurons $z + y - x$ ☌ 0, $z + y + x$ ☌ 0, $z - 2y$ ☌ 0.

3° Et par conſequent

$$z^3 * - 3yyz - 2y^3 \text{ ☌ } 0$$
$$- xxz + 2xxy.$$

4° Ainſi $3yy + xx + b$ ☌ 0.

5° Et $2y^3 - 2xxy - c$ ☌ 0.

6° Le quatriéme numero rend

xx ☌ $- 3yy - b$,

7° Et de cette façon x eſt imaginaire, ce qui nous oblige de prendre un autre tour.

8° C'a été pour une ſemblable raiſon, qu'au probleme troiſiéme, numero ſeptante & uniéme nous avons pris deux racines imaginaires avec une réelle, pour reſoudre la puiſſance

$$m^3 * + 3bm - \sqrt{27cc - 4b^3} \text{ ☌ } 0,$$

dont la forme étoit la même que celle de

$z^3 * + bz - c \mathrel{)\!(} 0$.

9° Prenons donc pour racines deux imaginaires negatives, l'une $-y + \sqrt{-xx}$, l'autre $-y - \sqrt{-xx}$, avec une troiſiéme $2y$ réelle affirmative.

10° Il viendra

$z * - 3yyz - 2y^3 \mathrel{)\!(} 0$
$+ xxz - 2xxy$

11° $3yy - xx + b \mathrel{)\!(} 0$

12° $2y^3 + 2xxy - c \mathrel{)\!(} 0$

13° $3yy \mathrel{)\!(} xx - b$ & ainſi $yy \mathrel{)\!(} \frac{1}{3} xx - \frac{1}{3} b$.

14° $xx \mathrel{)\!(} 3yy + b$

15° $8y^3 * + 2by - c \mathrel{)\!(} 0$, ou (ſuppoſant $n \mathrel{)\!(} 2y$)

16° $n^3 * + bn - c \mathrel{)\!(} 0$

17° $y \mathrel{)\!(} \frac{3c}{8xx - 2b}$

18° $64x^6 - 96bx^4 + 36bbxx \mathrel{)\!(} 4b^3 + 27cc$

19° Par extraction il vient $8x^3 \ldots 6bx \mathrel{)\!(} \sqrt{4x^3 + 27cc}$.

20° Le quatorziéme numero rend

$xx [b$, $x [\sqrt{b}$.

21° C'eſt pourquoy le dix-neuviéme ſignifie

$8x^3 - 6bx \mathrel{)\!(} \sqrt{4x^3 + 27cc}$, parce

22° que ſelon le quatorziéme numero, $xx [b$, & $x [\sqrt{b}$.

23° Suppoſant $m \mathrel{)\!(} 2x$, le vingt & uniéme devient $m^3 * - 3bm - \sqrt{4b^3 - 27cc} \mathrel{)\!(} 0$

24° Par le quinziéme numero $8y^3] c$. L'ex-

traction rend $2y \rfloor \sqrt[3]{c}$, ou $y \rfloor \frac{1}{2}\sqrt[3]{c}$ & $n \rfloor \sqrt[3]{c}$

25° Le douziéme demande $2y^3 \rfloor c$, ce qui eſt ſuperflu, à cauſe de $8y^3 \rfloor c$.

26° A cauſe de $y \rfloor \frac{1}{2}\sqrt[3]{c}$, & par conſéquent de $yy \rfloor \frac{1}{4}\sqrt[3]{cc}$, nous dirons que $3yy + b \rfloor b + \frac{3}{4}\sqrt[3]{cc}$. Comme par le quatorziéme $xx \rangle 3yy + b$, & que d'ailleurs $m \rangle 2x$; il s'enſuit que $xx \rfloor b + \frac{3}{4}\sqrt[3]{cc}$ & $mm \rfloor 4b + 3\sqrt[3]{cc}$. Ainſi la quantité $m \rfloor \sqrt{4b + 3\sqrt[3]{cc}}$.

27° A cauſe de $xx [b$, le dénominateur du dix-ſeptiéme numero ſurpaſſe $6b$.

28° A cauſe de cccj $y \rfloor \frac{c}{2b}$ & $n \rfloor \frac{c}{b}$.

29° Puiſque $y \rfloor \frac{c}{2b}$, ſi nous raiſonnons comme nous faiſions au vingt-ſixiéme numero, nous conclurons du quatorziéme que $xx \rfloor b + \frac{3cc}{4bb}$.

30° Ainſi $mm \rfloor 4b + \frac{c}{bb}$, de ſorte que $m \rfloor \sqrt{4b + \frac{3cc}{bb}}$

31° Le vingt-troiſiéme numero appartient au troiſiéme cas du troiſiéme probleme, où nous avions $n \rfloor 2\sqrt[3]{\frac{1}{2}c}$, ou ce qui eſt la même choſe $n \rfloor \sqrt[3]{4c}$, avec $n [\sqrt[3]{c}$ & $n [\sqrt{\frac{1}{3}b}$.

32° Au lieu que le probleme cité avoit b, nôtre vingt-troiſiéme numero a la quantité $3b$, & au

lieu qu'alors nous avions c ; nous avons $\sqrt{4b^3 + 27cc}$ vingt-troiſiéme numero du probleme dont il il s'agit ici.

33° C'eſt pourquoy nous devons reconnoître que la lettre m ne peut ſe déterminer ſans obſerver ces trois limites. La premiere, $m \rceil \sqrt{64b^3 + 432cc}$; la ſeconde $m \lceil \sqrt{4b^3 + 27cc}$, la troiſiéme, $m \lceil \sqrt{4b}$, ou $m \lceil 2\sqrt{b}$, ce qui revient à la limite que nous avions déja, au numero vingt deuxiéme, $x \lfloor \sqrt{b}$.

Autre maniere de reſoudre la puiſſance
$z^3 * + bz - c \mathrel{\overline{\wedge}} 0$.

34° Dans la propoſée mettons $\frac{3\overline{y}\overline{y} - b}{3\overline{y}}$, au lieu de z.

35° Il reſultera.

$27\overline{y}^3 - 27c\overline{y}^3 - b^3 \mathrel{\overline{\wedge}} 0$; ce qui étant diviſé par 27, il vient $\overline{y}^6 - c\overline{y}^3 - \frac{1}{27}b^3 \mathrel{\overline{\wedge}} 0$;

37° Et dans ceci mettant $\overline{x}$ au lieu de la quantité y^3, l'on écrit

38° $\overline{x}\overline{x} - \frac{1}{2}c\overline{x} - \frac{1}{27}b^3 \mathrel{\overline{\wedge}} 0$;

39° Ce qui fournit deux valeurs de $\overline{x}$;

40° Dont la grande eſt $\overline{x} \mathrel{\overline{\wedge}} \frac{1}{2}c + \sqrt{\frac{1}{4}cc + \frac{1}{27}b^3}$ & la petite $\overline{x} \mathrel{\overline{\wedge}} \frac{1}{2}c + - \sqrt{\frac{1}{4}cc + \frac{1}{27}b^3}$, celle-là étant affirmative & celle-ci negative.

41° Dans ce deux équations remettons y^3 au lieu de $\overline{x}$; nous aurons

42° $\overline{y}^3 \mathrel{\overline{\wedge}} \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}cc + \frac{1}{27}b^3}$

43° Et $\overline{y}^3 \mathrel{\overline{\wedge}} \frac{1}{2}c - \sqrt{\frac{1}{4}cc + \frac{1}{27}b^3}$;

44° De ſorte que la grande valeur eſt $\overline{y} \mathrel{\text{)}\!\!\text{)}} \sqrt[3]{\frac{1}{2}c + \sqrt{\frac{1}{4}cc + \frac{1}{27}b^3}}$,

45° Et la petite

$$\overline{y} \mathrel{\text{)}\!\!\text{)}} \sqrt[3]{\frac{1}{2}c - \sqrt{\frac{1}{4}cc + \frac{1}{27}b^3}}.$$

46° Selon le trente-quatriéme numero, la quantité z eſt compoſée de deux parties, l'une $\overline{y}$, l'autre $\frac{b}{3\overline{y}}$ & il eſt ici indifferent, comme il l'étoit au cent trente-neuviéme numero du probleme troiſiéme, de prendre la grande ou la petite valeur de $\overline{y}$.

47° Suivons la grande, ſi le hazard le veut. Il viendra

$$z \mathrel{\text{)}\!\!\text{)}} \sqrt[3]{\frac{1}{2}c + \sqrt{\frac{1}{4}cc + \frac{1}{27}b^3}}$$

$$+ \sqrt[3]{\frac{1}{2}c - \sqrt{\frac{1}{4}cc + \frac{1}{27}b^3}};$$

48° Où il faut remarquer que

$\sqrt[3]{\frac{1}{2}c - \sqrt{\frac{1}{4}cc + \frac{1}{27}b^3}}$ eſt une quantité réelle negative, ſavoir la racine d'un cube negatif. & que la quantité

$\sqrt[3]{\frac{1}{2}c + \sqrt{\frac{1}{4}cc + \frac{1}{27}b^3}}$, qui eſt réelle pareillement affirme plus que l'autre ne nie.

49° C'eſt pourquoy la valeur de z marquée au quarante-ſeptiéme numero, eſt la racine principale ($\mathrel{\text{)}\!\!\text{)}} zy$) de la puiſſance propoſée

$$z^3 * + bz - c \mathrel{\text{)}\!\!\text{)}} 0;$$

puiſque cette puiſſance n'a qu'une ſeule racine réelle, laquelle eſt en même temps poſitive, les deux autres étans imaginaires negatives.

50° Tout ce calcul paroîtra tres-facile, ſi nous nous ſouvenons de celuy par lequel nous avons reſolu, en ſuivant la même methode, le troiſiéme cas de l'équation

$$z^3 * - bz - c \propto 0.$$

51 A cauſe du quarante huitiéme numero, il ſera plus conforme à ce que demande une expreſſion naturelle, d'écrire

$$z \propto \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}c + \sqrt{\tfrac{1}{4}cc + \tfrac{1}{27}b^3}} - \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}c + \sqrt{\tfrac{1}{4}cc + \tfrac{1}{27}b^3}};$$

520 Parce que nous parlons plus volontiers de ſouſtraire une quantité affirmative d'une autre affirmative que d'en ajoûter une negative avec une qui affirme; de ſorte que l'on aimera peut-être mieux ſouſtraire la quantité affirmative

$$\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}c + \sqrt{\tfrac{1}{4}cc + \tfrac{1}{27}b^3}},$$

que d'ajoûter la negative

$$\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}c - \sqrt{\tfrac{1}{4}cc + \tfrac{1}{27}b^3}}.$$

Reſolution.

PREMIERE METHODE.

$$n\,[\,1\,;n\,]\,\sqrt[3]{\frac{c}{b}\,;n\,}$$

$$n^3 * + bn - c \propto 0. \qquad y \propto \tfrac{3}{2}n.$$

$$x \propto \sqrt[3]{\tfrac{3}{2}yy + b}.$$

$$z \propto -y + \sqrt{-xx}.$$

$$z \propto -y - \sqrt{-xx}.$$

z ∝

$z \mathrel{)\!(} 29$. Les deux premieres racines ſont imaginaires negatives. La troiſiéme eſt réelle & affirme.

SECONDE METHODE.

$$m \left[2 \sqrt{b}; m \left[\sqrt{^{6} 4b^{3} + 27cc}; \right.\right.$$

$$m \left. \right] \sqrt{4b + 3\sqrt{^{3} cc}};$$

$$m \left. \right] \sqrt{4b + \frac{3cc}{bb}}$$

$$m \left. \right] \sqrt{^{6} 64b^{3} + 432cc};$$

$$m^{3} * - 3bm - \sqrt{4b^{3} + 432cc}$$

$$\mathrel{)\!(} e. x \mathrel{)\!(} \tfrac{1}{2} m. y \mathrel{)\!(} \sqrt{\tfrac{1}{3} xx - \tfrac{1}{3} b}$$

$$\mathrel{)\!(} \frac{3c}{8xx - 2b}.$$ Les racines comme auparavant.

TROISIE'ME METHODE.

$$n \mathrel{)\!(} \sqrt{^{3} \tfrac{1}{2} c + \sqrt{\tfrac{1}{4} cc + \tfrac{1}{27} b^{3}}}$$

$$- \sqrt{^{3} - \tfrac{1}{2} c + \sqrt{\tfrac{1}{4} cc + \tfrac{1}{27} b}},$$

$$y \mathrel{)\!(} \tfrac{1}{2} n. x \mathrel{)\!(} \sqrt{3yy + b}.$$

Les racines comme auparavant.

$$\sqrt{4b + \frac{3cc}{bb}}$$

PROBLEME VI.

Resoudre la puissance
$z^3 * + bz + c \mathrel{\text{Ø}} 0$.

1° SI l'on prend trois racines réelles dont les deux premieres $y + x$ & $y - x$ affirment & la troisiéme $-2y$ nie ;

2° Il viendra
$$z^3 * - 3yyz + 2y^3 \mathrel{\text{Ø}} 0$$
$$- xxz - 2xxy$$

3° $3yy + xx + b \mathrel{\text{Ø}} 0$,

4° $2y^3 - 2xxy - c \mathrel{\text{Ø}} 0$

5° Le troisiéme numero rendra $xx \mathrel{\text{Ø}} -3yy - b$.

6° De cette façon x est imaginaire, ce qui nous oblige de donner un autre tour à nôtre calcul.

7° Prenons deux racines imaginaires qui affirment ; l'une $y + \sqrt{} - xx$, l'autre $y - \sqrt{} - xx$ & une troisiéme réelle negative nommée $-2y$. Il viendra

8° $z^3 * - 3yyz + 2y^3 \mathrel{\text{Ø}} 0$,
$$+ xxz + 2xxy$$

9° $3yy - xx + b \mathrel{\text{Ø}} 0$,

10° $2y^3 + 2xxy - c \mathrel{\text{Ø}} 0$,

11° Nous tombons sur les onziéme & douziéme numero du probleme précedent, & ainsi le calcul se trouvera le même qu'il étoit alors.

12° Cependant comme la dénomination des racines est contraire, celles qui nioient alors, affirment presentement, & la principale qui affirmoit nie ici.

Resolution.

PREMIERE METHODE.

$$n\,[\,0,\ n\,]\ \sqrt[3]{c},\ n\,]\,\frac{c}{b},$$

$$n^3 * + bn - c \propto 0.\ y \propto \tfrac{1}{2} n,$$

$$x \propto \sqrt[3]{\tfrac{27}{4}yy + b}.\ z \propto y + \sqrt[3]{-xx}.$$
$$z \propto y - \sqrt[3]{-xx}.\ z \propto -2y.$$

Deux racines imaginaires affirmatives, & une réelle & negative.

SECONDE METHODE.

$$m\,[\,2\sqrt{b},\ m\,[\,\sqrt[6]{4b + \tfrac{27cc}{bb}},$$

$$m\,]\sqrt{4b + 3\sqrt[3]{cc}},\ m\,]\sqrt{4b + \frac{3cc}{bb}},$$

$$m\,]\sqrt[6]{64b^3 + 432cc},$$

$$m^3 * - 3bm - \sqrt{4b^3 + 27cc} \propto 0.$$
$$x \propto \tfrac{1}{2} m. \qquad y \propto$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{3}xx - \tfrac{1}{3}b} \propto \frac{3c}{8xx - 2b}.$$

Les racines comme auparavant.

TROISIE'ME METHODE.

$$n \propto \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}c + \sqrt{\tfrac{1}{4}cc + \tfrac{1}{27}b^3}}$$

$$- \sqrt[3]{} - \tfrac{3}{2} c + \sqrt{\tfrac{3}{4} cc + \tfrac{1}{27} b^3}.$$

$y \mathrel{\text{)}\!\!\text{)} } \tfrac{3}{2} n.$

$x \mathrel{\text{)}\!\!\text{)} } \sqrt[3]{3yy + b}.$ Les racines comme auparavant.

PROBLEME VII.

Une puiſſance étant donnée avec deux limites, entre leſquelles ſoit une racine réelle, & non pas plus d'une, trouver cette racine même.

1° LE calcul ſe fait par des ſubſtitutions qui font que l'on approche de plus en plus de la racine cherchée, juſqu'à ce qu'on la trouve exactement ; ſi elle eſt rationelle, ou prés de la verité, ſi elle eſt irrationelle.

PREMIER EXEMPLE.

Soit la puiſſance propoſée

$z^3 * - 1106569\, z +$
$40011720 \mathrel{\text{)}\!\!\text{)} } 0,$

& que l'on doive trouver une de ſes racines entre 0 & 500.

2° Soit $z \mathrel{\text{)}\!\!\text{)} } 0$; la propoſée deviendra

$+ 40011720 \mathrel{\text{)}\!\!\text{)} } 0.$

Soit $z \mathrel{\text{)}\!\!\text{)} } 500$, il viendra

$- 28167300 \mathrel{\text{)}\!\!\text{)} } 0$

$z \mathrel{\text{)}\!\!\text{)} } 300$ produit $+ 95146500 \mathrel{\text{)}\!\!\text{)} } 0$

$z \mathrel{\text{)}\!\!\text{)} } 400$ produit $+ 21489600 \mathrel{\text{)}\!\!\text{)} } 0$

3° Ainſi z eſt entre 400 & 500,

4° Parce que l'un de ces deux nombres produit moins & l'autre plus.

5o Soit $z \gtrless p + 400$.

6o La propoſée ſe changera en

$p^3 + 1200\,pp \text{ —— } 626569\,p + 21489600 \gtrless 0$ premiere équation transformée,

7o Et p ſe trouvera entre 0 & 100, à cauſe de $z \gtrless p + 400$ & de z entre 400 & 500.

8o $p \gtrless 0$ fait $+ 21489600 \gtrless 0$.

$p \gtrless 100$ fait $- 28167300 \gtrless 0$.

$p \gtrless 50$ fait $- 6713850 \gtrless 0$.

$p \gtrless 30$ fait $+ 3799530 \gtrless 0$.

$p \gtrless 40$ fait $- 1589160 \gtrless 0$,

9o De ſorte que p eſt entre 30 & 40.

10o Soit $p \gtrless q + 30$.

11o La premiere transformée ſe changera en $q^3 + 1290\,qq - 551869\,q + 3799530 \gtrless 0$, ſeconde équation transformée,

12o Et q ſe trouvera entre 0 & 10, à cauſe de p entre 30 & 40, avec $p \gtrless q + 30$.

13o $q \gtrless 0$ fait $+ 3799530 \gtrless 0$.

$q \gtrless 10$ fait $- 1589160 \gtrless 0$.

$q \gtrless 5$ fait $+ 1072560 \gtrless 0$.

$q \gtrless 7$ fait $0 \gtrless 0$.

14o Comme il n'y a point d'erreur dans ce dernier reſultat ; il en faut conclure que q vaut exactement le nombre 7.

15o Ceci avec $p \gtrless q + 30$ rend $p \gtrless 37$, & comme nous avions auparavant $z \gtrless p + 400$; Il s'enſuit que la valeur cherchée de z fait exactement 437.

16o Au reſte à meſure que le calcul avance, l'on n'introduit jamais de fractions, ſi ce n'eſt des décimales, & quand la propoſée contient des fractions, on a ſoin de les chaſſer d'abord.

EXEMPLE DEUXIE'ME.

Soit la propoſée

$n^3 * - 12n - 12 \mathrel{)\!(} 0$, & qu'il faille trouver la valeur de n qui ſelon la premiere methode pour reſoudre le premier cas du troiſiéme probleme eſt entre $2 \Upsilon^{3}\frac{1}{2} c$ & $\Upsilon \frac{3}{4} b$, c'eſt-à-dire entre 363 centiémes & le nombre entier 4.

17° La puiſſance propoſée ne contient point à la verité de fraction, mais comme la limite inferieure contient des centiémes ; afin de n'avoir aucune fraction,

18° Soit $l \mathrel{)\!(} 100 n$.

19° Nous aurons pour équation préparée $l^3 * - 120000 l - 12000000 \mathrel{)\!(} 0$,

20° Dans laquelle il faudra chercher l entre 363 & 400.

21° Nous ne pouvons pas ſubſtituer tout d'un coup & commodément le nombre 363, mais bien en trois fois, parce qu'il contient trois figures ſignificatives.

22° Soit $l \mathrel{)\!(} p + 300$.

23° L'équation préparée ſe changera en $p^3 + 900 pp + 150000 p - 21000000 \mathrel{)\!(} 0$ premiere transformée.

24° Soit $p \mathrel{)\!(} q + 60$.

25° La premiere transformée ſe changera en $q^3 + 1080 qq + 268800 q - 8544000 \mathrel{)\!(} 0$ ſeconde transformée.

26° Soit $q \mathrel{)\!(} r + 3$.

27° La ſeconde transformée ſe changera en $r^3 + 1089 rr + 275307 r - 7727853 \mathrel{)\!(} 0$, troiſiéme transformée,

28° Et les ſix numero precedents for-

que $l \gtrless 363$ produiroit

$-7727853 \gtrless 0$, ſi l'on ſubſtituoit cette valeur de $l \gtrless 363$ dans la préparée.

29° Dans la même préparée ſubſtituons 400 au lieu de l, il en reſultera

$+4000000 \gtrless 0$.

30° Les deux numero précedents montrent qu'il y a veritablement une valeur de l entre 363 & 400.

31° A ce qui precede il faut ajoûter que les ſix numero dont il eſt fait mention au vingt-huitiéme, font connoître que ſi dans la puiſſance préparée l'on ſubſtituoit $r + 363$ au lieu de l; il en reſulteroit le vingt-ſeptiéme numero.

32° De $l \gtrless r + 363$ avec l] 400 reſulte r entre 0 & 37, dont la moitié accommodante eſt 20.

33° $r \gtrless 20$ fait $-1778113 \gtrless 0$.

34° Le milieu accommodant entre 20 & 37 eſt 30.

35° $r \gtrless 30$ fait $+1538457 \gtrless 0$.

36° 20 produit moins & 30 produit plus. C'eſt pourquoy r eſt entre 20 & 30.

37° Soit $r \gtrless f + 20$.

38° Il viendra $f^3 + 1149ff + 320067f - 1778113 \gtrless 0$.

39 A cauſe de $r \gtrless f + 20$ avec r] 30, il s'enſuit que f eſt entre 0 & 10.

40° $f \gtrless 0$ fait $-1778113 \gtrless 0$

$f \gtrless 10$ fait $+1538457 \gtrless 0$.

$f \gtrless 5$ fait $-148928 \gtrless 0$.

$f \gtrless 7$ fait $+519000 \gtrless 0$.

$f \gtrless 6$ fait $+183869 \gtrless 0$.

41° De ſorte que f eſt entre 5 & 6.

42° Si l'on ne veut pas aller plus loin, prenons $f \gtrless 5$. De cette façon $r \gtrless f + 20$ rend $r \gtrless 25$; & puiſque $l \gtrless r + 363$ il viendra $l \gtrless 388$ & un peu

plus. Enfin comme $l x \gtrless 100 n$, il faut conclure que $n \gtrless 388$ centiémes parties, & un peu plus.

43° Si l'on veut pouſſer plus loin le calcul, ſoit $'f \gtrless 100 f$.

44° Le trente-huitiéme numero ſe changera en $'f^3 + 114900\ 'f'f + 3200670000\ 'f - 177811300000 \gtrless 0$.

45° A cauſe de $'f \gtrless 100 f$ & de f entre 5 & 6, il s'enſuit que $'f$ eſt entre 500 & 600.

46° Soit $'f \gtrless t + 500$. Le quarante-quatriéme numero ſe changera en

47° $t^3 + 116400\ tt + 33163200000\ t - 148928000000 \gtrless 0$.

48° A cauſe de $'f \gtrless t + 500$ avec $'f$ entre 500 & 600, il faut que t ſoit entre 0 & 100.

49° $t \gtrless 0$ rend $- 148928000000 \gtrless 0$.
$t \gtrless 100$ rend $+ 183869000000 \gtrless 0$.
$t \gtrless 50$ rend $+ 17179125000 \gtrless 0$.
$t \gtrless 30$ rend $- 4931361300 \gtrless 0$.
$t \gtrless 40$ rend $- 1608889600 \gtrless 0$,

50° De ſorte que t eſt entre 40 & 50.

51° Soit $t \gtrless v + 40$.

52° Le quarante-ſeptiéme numero ſe changera en $v^3 + 116520\ vv + 3325636800\ v - 1608889600 \gtrless 0$.

53° A cauſe de $t \gtrless v + 40$, avec t entre 40 & 50, il faut que v tombe entre 0 & 10.

54° $v \gtrless 0$ fait $- 1608889600 \gtrless 0$.
$v \gtrless 10$ fait $+ 17179125000 \gtrless 0$.
$v \gtrless 5$ fait $+ 542201125 \gtrless 0$.
$v \gtrless 3$ fait $- 611936893 \gtrless 0$.
$v \gtrless 4$ fait $- 2784484416 \gtrless 0$,

55° De ſorte que v eſt entre 4 & 5, & com-

me

me $t \supset v + 40$, il eſt clair que t eſt entre 44 & 45, qui ſont des centiémes de centiémes de n, c'eſt-à-dire des dix milliémes, parce que nous avons deux fois multiplié par 100.

56° Au quarantente-deuxiéme numero nous avions $n \supset 388$ centiémes & un peu plus, nous venons de trouver qu'à ces 388 centiémes il faut ajoûter une quantité qui eſt entre 44 & 45 dix milliémes, d'où nous devons conclure que n eſt entre 38844 & 38845 dix milliémes.

57° Nous enſeignerons cy-aprés à abreger ce calcul.

EXEMPLE TROISIE'ME.

58° Reſoudre l'équation

$z^3 * - 12z - 12 \supset 0$.

59° La premiere methode pour reſoudre le premier cas de la forme

$z^3 * - b - c \supset 0$

nous oblige de reſoudre l'équation

$n^3 * - bn - \supset 0$,

c'eſt-à-dire

$n^3 * - 12n - 12 \supset 0$, en cherchant n entre 363 centiémes & 4 entiers.

60° Si nous pouſſons plus loin le calcul de l'exemple precedent, nous trouverons que n ne ſurpaſſe pas d'une ſeule particule 388448570 cent millioniémes, ce qui fait la valeur de la principale racine $z\ y$ de la puiſſance propoſée.

61° Ainſi $y \supset 19422418\frac{5}{}$;

Ce qui étant ſubſtitué dans $x \supset 2\ b - 3yy$ fait trouver $x \supset 82649243$ telles particules.

63° Enſuite $z \supset -y + x$ montre que $z \supset$

PROBLEME IX.

Ayant entrepris de commencer par la découverte de ce que vaut x, *la resolution d'une puissance cubique, dont le second terme soit évanoui, trouver par la regle d'approximation enseignée au septiéme probleme, si la quantité* x *étant irrationelle, son quarré* xx *est commensurable ou incommensurable.*

1° POussez le calcul assez loin pour que *m* se trouve entre deux limites si voisines, que leurs quarrez ne different pas entre eux d'un entier.

2° S'il est possible de prendre entre ces deux quarrez un nombre entier, qui étant divisé par quatre rende un quotient sans fraction, & tel que sa substitution au lieu de xx, dans les deux formules qui déterminent y dépendamment de xx, fasse trouver une seule & même valeur de y, il en faudra conclure que xx est une quantité commensurable qui fait précisement le nombre que l'on aura substitué.

3° Quand il arrive autrement, il en faut conclure que xx est incommensurable & ne pourra jamais être connuë avec une exactitude parfaite, non plus que y.

PREMIER EXEMPLE.

Soit l'équation

$z^6 + 41z - 184 \square^6$ dont nous avons

trouvé la resolution au probleme précedent par la methode de Cardan

1° Pour la resoudre en commençant le calcul par la recherche de x, c'est-à-dire par la seconde methode du troisiéme cas du probleme troisiéme ;

2° La regle d'approximation enseignée au probleme septiéme fera tomber m entre 529 & 530 en centiémes.

3° Les quarrez de 529 & de 530 centiémes, savoir 279841 & 280900 en dix milliémes, ne different pas entre eux d'un entier, qui contient ici dix mille particules, & l'on peut prendre entre eux le nombre entier 28.

4° Soit $mm \propto 28$, & par consequent $xx \propto 7$, puisque xx fait le quart de mm, à cause de $x \propto \frac{1}{2} m$.

5° A present $y \propto \sqrt{\frac{1}{3}b + \frac{1}{3}xx} \propto \sqrt{16} \propto 4$, & $y \propto \frac{36}{8xx + 2b} \propto \frac{552}{138} \propto 4$.

6° De ce que les deux differentes formules de y font trouver une même valeur $y \propto 4$; Je conclus que veritablement $xx \propto 7$ & $y \propto 4$, ce qui découvre dans un moment les trois racines cherchées

$$z \propto -4 + \sqrt{-7},$$
$$z \propto -4 - \sqrt{-7},$$
$$z \propto 8.$$

7° Et si l'on multiplie $z + 4 - \sqrt{-7} \propto 0$ par $z + 4 + \sqrt{-7} \propto 0$ & le produit $zz + 8z + 23 \propto 0$ par $z - 8 \propto 0$, l'on verra renaître l'équation proposée

$$z^3 - 41z - 184 \propto 0.$$

Ayant entrepris de commencer par la découverte de ce que vaut x, *la reſolution d'une puiſſance cubique, dont le ſecond terme ſoit évanoüi, trouver par la regle d'approximation enſeignée au ſeptiéme probleme, ſi la quantité* x *étant irrationelle, ſon quarré* xx *eſt commenſurable ou incommenſurable.*

1° POuſſez le calcul aſſez loin pour que *m* ſe trouve entre deux limites ſi voiſines, que leurs quarrez ne different pas entre eux d'un entier.

2° S'il eſt poſſible de prendre entre ces deux quarrez un nombre entier, qui étant diviſé par quatre rende un quotient ſans fraction, & tel que ſa ſubſtitution au lieu de xx, dans les deux formules qui déterminent y dépendamment de xx, faſſe trouver une ſeule & même valeur de y, il en faudra conclure que xx eſt une quantité commenſurable qui fait préciſement le nombre que l'on aura ſubſtitué.

3° Quand il arrive autrement, il en faut conclure que xx eſt incommenſurable & ne pourra jamais être connuë avec une exactitude parfaite, non plus que y.

PREMIER EXEMPLE.

Soit l'équation

$$y^4 - 41z - 184 \text{ ☐} = 0$$ dont nous avons

trouvé la resolution au probleme précedent par la methode de Cardan

1° Pour la resoudre en commençant le calcul par la recherche de x, c'est-à-dire par la seconde methode du troisiéme cas du probleme troisiéme ;

2° La regle d'approximation enseignée au probleme septiéme fera tomber m entre 529 & 530 en centiémes.

3° Les quarrez de 529 & de 530 centiémes, savoir 279841 & 280900 en dix milliémes, ne different pas entre eux d'un entier, qui contient ici dix mille particules, & l'on peut prendre entre eux le nombre entier 28.

4° Soit $mm \propto 28$, & par consequent $xx \propto 7$, puisque xx fait le quart de mm, à cause de $x \propto \frac{1}{2} m$.

5° A present $y \propto \sqrt[3]{\frac{1}{8}b + \sqrt{\frac{1}{64}xx}} \propto \sqrt{16} \propto 4$, & $y \propto \frac{3c}{8xx + 2b} \propto \frac{552}{138} \propto 4$.

6° De ce que les deux differentes formules de y font trouver une même valeur $y \propto 4$; Je conclus que veritablement $xx \propto 7$ & $y \propto 4$, ce qui découvre dans un moment les trois racines cherchées

$$z \propto -4 + \sqrt{-7},$$
$$z \propto -4 - \sqrt{-7},$$
$$z \propto 8.$$

7° Et si l'on multiplie $z + 4 - \sqrt{-7} \propto 0$ par $z + 4 + \sqrt{-7} \propto 0$ & le produit $zz + 8z + 23 \propto 0$ par $z - 8 \propto 0$, l'on verra renaître l'équation proposée

$$z^3 - 41z - 184 \propto 0.$$

PROBLEME IX.

Ayant entrepris de commencer par la découverte de ce que vaut x, *la reſolution d'une puiſſance cubique, dont le ſecond terme ſoit évanoüi, trouver par la regle d'approximation enſeignée au ſeptiéme probleme, ſi la quantité* x *étant irrationelle, ſon quarré* xx *eſt commenſurable ou incommenſurable.*

1° POuſſez le calcul aſſez loin pour que *m* ſe trouve entre deux limites ſi voiſines, que leurs quarrez ne different pas entre eux d'un entier.

2° S'il eſt poſſible de prendre entre ces deux quarrez un nombre entier, qui étant diviſé par quatre rende un quotient ſans fraction, & tel que ſa ſubſtitution au lieu de *xx*, dans les deux formules qui déterminent *y* dépendamment de *xx*, faſſe trouver une ſeule & même valeur de *y*, il en faudra conclure que *xx* eſt une quantité commenſurable qui fait préciſement le nombre que l'on aura ſubſtitué.

3° Quand il arrive autrement, il en faut conclure que *xx* eſt incommenſurable & ne pourra jamais être connuë avec une exactitude parfaite, non plus que *y*.

PREMIER EXEMPLE.

Soit l'équation

$z^3 - 41z - 184 \propto 0$ dont nous avons

trouvé la resolution au probleme précedent par la methode de Cardan

1° Pour la resoudre en commençant le calcul par la recherche de x, c'est-à-dire par la seconde methode du troisiéme cas du probleme troisiéme ;

2° La regle d'approximation enseignée au probleme septiéme fera tomber m entre 529 & 530 en centiémes.

3° Les quarrez de 529 & de 530 centiémes, savoir 279841 & 280900 en dix milliémes, ne different pas entre eux d'un entier, qui contient ici dix mille particules, & l'on peut prendre entre eux le nombre entier 28.

4° Soit $mm \propto 28$, & par consequent $xx \propto 7$, puisque xx fait le quart de mm, à cause de $x \propto \frac{1}{2} m$.

5° A present $y \propto \sqrt{\frac{1}{3}b + \sqrt{\frac{1}{27}xx}} \propto \sqrt{16} \propto 4$, & $y \propto \frac{3c}{8xx + 2b} \propto \frac{552}{138} \propto 4$.

6° De ce que les deux differentes formules de y font trouver une même valeur $y \propto 4$; Je conclus que veritablement $xx \propto 7$ & $y \propto 4$, ce qui découvre dans un moment les trois racines cherchées

$$z \propto -4 + \sqrt{-7},$$
$$z \propto -4 - \sqrt{-7},$$
$$z \propto 8.$$

7° Et si l'on multiplie $z + 4 - \sqrt{-7} \propto 0$ par $z + 4 + \sqrt{-7} \propto 0$ & le produit $zz + 8z + 23 \propto 0$ par $z - 8 \propto 0$, l'on verra renaître l'équation proposée

$$z^3 - 41z - 184 \propto 0.$$

PROBLEME IX.

Ayant entrepris de commencer par la découverte de ce que vaut x, *la resolution d'une puissance cubique, dont le second terme soit évanoui, trouver par la regle d'approximation enseignée au septiéme probleme, si la quantité* x *étant irrationelle, son quarré* xx *est commensurable ou incommensurable.*

1° POussez le calcul assez loin pour que *m* se trouve entre deux limites si voisines, que leurs quarrez ne different pas entre eux d'un entier.

2° S'il est possible de prendre entre ces deux quarrez un nombre entier, qui étant divisé par quatre rende un quotient sans fraction, & tel que sa substitution au lieu de xx, dans les deux formules qui déterminent y dépendamment de xx, fasse trouver une seule & même valeur de y, il en faudra conclure que xx est une quantité commensurable qui fait précisement le nombre que l'on aura substitué.

3° Quand il arrive autrement, il en faut conclure que xx est incommensurable & ne pourra jamais être connuë avec une exactitude parfaite, non plus que y.

PREMIER EXEMPLE.

Soit l'équation

$z^6 + 41z - 184 \propto 0$ dont nous avons

trouvé la resolution au probleme précedent par la methode de Cardan

1° Pour la resoudre en commençant le calcul par la recherche de x, c'est-à-dire par la seconde methode du troisiéme cas du probleme troisiéme ;

2° La regle d'approximation enseignée au probleme septiéme fera tomber m entre 529 & 530 en centiémes.

3° Les quarrez de 529 & de 530 centiémes, savoir 279841 & 280900 en dix milliémes, ne different pas entre eux d'un entier, qui contient ici dix mille particules, & l'on peut prendre entre eux le nombre entier 28.

4° Soit $mm \propto 28$, & par consequent $xx \propto 7$, puisque xx fait le quart de mm, à cause de $x \propto \frac{1}{2} m$.

5° A present $y \propto \sqrt{\frac{1}{3}b + \sqrt{\frac{1}{27}xx}} \propto \sqrt{16} \propto 4$, & $y \propto \frac{36}{8xx + 2b} \propto \frac{552}{138} \propto 4$.

6° De ce que les deux differentes formules de y font trouver une même valeur $y \propto 4$; Je conclus que veritablement $xx \propto 7$ & $y \propto 4$, ce qui découvre dans un moment les trois racines cherchées

$$z \propto -4 + \sqrt{-7},$$
$$z \propto -4 - \sqrt{-7},$$
$$z \propto 8.$$

7° Et si l'on multiplie $z + 4 - \sqrt{-7} \propto 0$ par $z + 4 + \sqrt{-7} \propto 0$ & le produit $zz + 8z + 23 \propto 0$ par $z - 8 \propto 0$, l'on verra renaître l'équation proposée

$$z^3 - 41z - 184 \propto 0.$$

$— 111574940$, & par le moyen de $z \gtrless — y — x$ il ne faut qu'un moment pour trouver $z \gtrless — 27687430$; de sorte que nous avons les trois valeurs cherchées de la quantité z en cent millioniémes particules.

64° Si l'on veut suivre la seconde methode pour resoudre le susdit cas de la forme dont il s'agit, cette methode nous obligera de resoudre la puissance $m^3 * — 36\,m + \gamma\ 3024 \gtrless 0$, c'est-à-

65° dire la puissance $m^3 * — 36\,m + 54\frac{990908330}{1000000000} \gtrless 0$, en cherchant m entre 0 & 346 centiémes.

66° Multiplions toutes les valeurs de m par mille. Le numero précedent se changera en $m^3 * — 36000000\,m + 54990908330 \gtrless 0$,

66° Et calculent par une voye pareille à celle du deuxiéme exemple, nous trouverons $m \gtrless 16529849$, dont la moitié rend $x \gtrless 8264924\frac{5}{6}$ en cent millioniémes partis, aprés quoy les formules $y \gtrless \gamma\ \sqrt[3]{\frac{\frac{1}{2}b — \frac{1}{2}xx}{2b — 8xx}}$, $z \gtrless — y + x$, $z \gtrless — y — x$, $z \gtrless 2y$ feront trouver la même resolution que nous avions tout-à-l'heure.

68° Il n'y a pas plus de difficulté à trouver la même chose par la troisiéme methode.

69° Car aprés avoir découvert la somme $— 2y$ des deux petites racines, que l'on trouvera chacune par le moyen de ses limites, il n'y aura qu'à changer en plus le signe moins de la somme $— 2y$, pour avoir la valeur de la grande racine.

PROBLEME VIII.

Employer la Methode de Cardan.

Soit l'équation $z^3 * - 41z - 184 \propto 0$

laquelle appartient au troiſiéme cas du troiſiéme probleme, à cauſe de $4b^3 \rfloor 27cc$ *& de la forme* $z^3 * - bz - c \propto 0$.

1° SI l'on ſuit la troſiéme methode du ſuſdit probleme ; il viendra n preſque égale au nombre 8.

2° J'eſſaye ſi la ſubſtitution de 8 dans $n^3 * - 41z - 184 \propto 0$ réuſſira Je trouve qu'elle le fait, & conclus que $n \propto 8$.

3° Enſuite $y \propto \frac{1}{2} n \propto 4$,

$x \propto \sqrt{3yy - b} \propto \sqrt{7}$,

de ſorte que $xx \propto 7$.

4° Les trois racines ſont donc.

$z \propto -y + \sqrt{-xx} \propto -4 + \sqrt{-7}$

$z \propto -y - \sqrt{-xx} \propto -4 - \sqrt{-7}$

$z \propto 2y \propto 8$, & la puiſſance propoſée eſt pleinement reſoluë.

PROBLEME IX.

Ayant entrepris de commencer par la découverte de ce que vaut x, *la reſolution d'une puiſſance cubique, dont le ſecond terme ſoit évanoüi, trouver par la regle d'approximation enſeignée au ſeptiéme probleme, ſi la quantité* x *étant irrationelle, ſon quarré* xx *eſt commenſurable ou incommenſurable.*

1° POuſſez le calcul aſſez loin pour que m ſe trouve entre deux limites ſi voiſines, que leurs quarrez ne different pas entre eux d'un entier.

2° S'il eſt poſſible de prendre entre ces deux quarrez un nombre entier, qui étant diviſé par quatre rende un quotient ſans fraction, & tel que ſa ſubſtitution au lieu de xx, dans les deux formules qui déterminent y dépendamment de xx, faſſe trouver une ſeule & même valeur de y, il en faudra conclure que xx eſt une quantité commenſurable qui fait préciſement le nombre que l'on aura ſubſtitué.

3° Quand il arrive autrement, il en faut conclure que xx eſt incommenſurable & ne pourra jamais être connuë avec une exactitude parfaite, non plus que y.

PREMIER EXEMPLE.

Soit l'équation

$z^3 - 41z - 184 \propto 0$ dont nous avons

trouvé la reſolution au probleme précedent par la methode de Cardan

1° Pour la reſoudre en commençant le calcul par la recherche de x, c'eſt-à-dire par la ſeconde methode du troiſiéme cas du probleme troiſiéme ;

2° La regle d'approximation enſeignée au probleme ſeptiéme fera tomber m entre 529 & 530 en centiémes.

3° Les quarrez de 529 & de 530 centiémes, ſavoir 279841 & 280900 en dix milliémes, ne different pas entre eux d'un entier, qui contient ici dix mille particules, & l'on peut prendre entre eux le nombre entier 28.

4° Soit $mm \propto 28$, & par conſequent $xx \propto 7$, puiſque xx fait le quart de mm, à cauſe de $x \propto \frac{1}{2} m$.

5° A preſent $y \propto \sqrt{\frac{1}{3} b + \sqrt{\frac{1}{27} xx}} \propto \sqrt{16} \propto 4$, & $y \propto \frac{3c}{8xx + 2b} \propto \frac{552}{138} \propto 4$.

6° De ce que les deux differentes formules de y font trouver une même valeur $y \propto 4$; Je conclus que veritablement $xx \propto 7$ & $y \propto 4$, ce qui découvre dans un moment les trois racines cherchées

$$z \propto -4 + \sqrt{-7},$$
$$z \propto -4 - \sqrt{-7},$$
$$z \propto 8.$$

7° Et ſi l'on multiplie $z + 4 - \sqrt{-7} \propto 0$ par $z + 4 + \sqrt{-7} \propto 0$ & le produit $zz + 8z + 23 \propto 0$ par $z - 8 \propto 0$, l'on verra renaître l'équation propoſée

$$z^3 - 41z - 184 \propto 0.$$

SECOND EXEMPLE.

8° Qu'il faille reſoudre la puiſſance $z^3 * - 336\,z + 1281 \gtrless e$, laquelle appartient au premier cas du quatriéme probleme, à cauſe de $4\,b$ [27 *cc.*

9° La ſeconde methode fournit m [θ avec m] Υ 336 & $m^3 * - 108\,m + \Upsilon$ 107426277 $\gtrless \theta$.

10° Soit $m^2 \gtrless 190\,m$.

11° Il viendra m^2 [θ & m^2] 1834, avec $m^2 * - 10080000\,m^2 + 10364664828 \gtrless \theta$,

12° Et obſervant la regle qu'enſeigne le ſeptiéme probleme, il viendra

13° $m^2 \gtrless \theta$ fait $+ 10364664828 \gtrless \theta$, $m^2 \gtrless 1000$ fait $+ 1284664828 \gtrless \theta$;

14° De ſorte que m^2 n'eſt pas entre θ & 1000, puiſque ces deux hypotheſes produiſent chacune plus, mais entre 1000 & 1834.

15° Soit $m^2 \gtrless p + 1000$. Il viendra

16° $p^3 + 3000\,pp * - 7080000\,p + 1284664828$,

17° avec p entre θ & 834.

18° Pour chercher p entre θ & 834,

19° $p \gtrless \theta$ produit $+ 1284664828 \gtrless \theta$,

20° $p \gtrless 800$ produit $- 1947335172 \gtrless \theta$;

& ainſi p eſt entre θ & 800, dont l'une produit plus & l'autre moins.

21° $p \gtrless 400$ fait $- 1003335172 \gtrless \theta$.

$p \gtrless 200$ fait $- 3335172 \gtrless \theta$.

$p \gtrless 100$ fait $+ 607664828 \gtrless \theta$.

22° Ainſi p eſt entre 100 & 200.

23° Soit $p \gtrless q + 100$. Il viendra

24° $q^3 + 3300\,qq - 6450000 +$

25° Pour chercher q entre θ & 100.

260 $q \gtrless 0$ fait $607664828 \gtrless 0$.
$q \gtrless 100$ fait $— 333517^2 \gtrless 0$.
$q \gtrless 50$ fait $+ 293539828 \gtrless 0$.
$q \gtrless 80$ fait $+ 113296828 \gtrless 0$
$q \gtrless 90$ fait $+ 54623828 \gtrless 0$.

270 Il paroît que q est entre 90 & 100.

280 Soit $q \gtrless r + 90$. Il viendra

290 $r^3 + 3570\,rr — 5831700\,r + 54623828 \gtrless 0$.

300 $r \gtrless 0$ fait $+ 54623828 \gtrless 0$.
$r \gtrless 10$ fait $— 3335172 \gtrless 0$.
$r \gtrless 5$ fait $+ 25554703 \gtrless 0$.
$r \gtrless 8$ fait $+ 8199220 \gtrless 0$.
$r \gtrless 9$ fait $+ 2427725 \gtrless 0$;

310 De sorte que r tombe entre 9 & 10 ; par conséquent q entre 99 & 100 ; ensuite p entre 199 & 200 ; ensuite m' entre 1199 & 1200, & ainsi m entre 1199 & 1200, en centiémes.

320 Sans aller plus outre ; quarrez de 1199 & de 1200 centiémes font 1437601 & 1440000 dix milliémes, & ces deux quarrez ne different pas entre eux d'un entier, qui contient ici dix mille particules. Mais bien loin qu'entre ces deux quarrez on puisse trouver un nombre entier capable d'être mesuré par quatre, l'on n'y en sauroit trouver absolument aucun ; de sorte qu'il paroît d'abord que la quantité $x\,x$ est incommensurable & un peu au dessous de 6 entiers qui font la moitié de 1200 centiémes, c'est-à-dire de 12 entiers.

330 Puisque nous ne saurions resoudre avec une exactitude parfaite ; soit $x \gtrless 6$.

340 La formule $y \gtrless \sqrt{\frac{1}{3}\,b — \frac{1}{3}\,xx}$ rendra $y \gtrless 10$, au lieu que la formule $y \gtrless \frac{3c}{x\,b — \frac{1}{3}\,x^3}$ rendra $y \gtrless 10\,\frac{3}{128}$.

350 Prenons $y \propto 10$ avec $x \propto 6$. Les trois racines ſeront $z \propto 16$, $z \propto 4$, $z \propto -20$.

360 Mais multipliant $z - 16 \propto \theta$ par $z - 4 \propto \theta$ & le produit $zz - 20z + 64 \propto \theta$, par $z + 20 \propto \theta$, il viendra $z^3 * - 336z + 1280 \propto \theta^3$ au lieu que la propoſée étoit $z^3 * - 336z + 1281 \propto \theta$.

370 Si l'on veut que l'erreur diminuë, il faudra trouver m plus approchamment de la verité, en calculant pour trouver la valeur de m en cent millioniémes parties, en cas que l'on ait beſoin d'une auſſi grande exactitude.

TROISIE'ME EXEMPLE.

380 Pour reſoudre la puiſſance $z^3 * - 10\frac{1}{2}z + 23 \propto \theta$.

390 Afin de chaſſer la fraction $\frac{1}{2}$. Soit

400 $p \propto 2z$. Il viendra la transformée

410 $p^3 * - 41p + 184 \propto \theta$, qui eſt la même équation que celle qui fait le premier exemple, dont tout le calcul reviendra.

420 Nous trouverons

$$p \propto -4 + \Upsilon - 7$$
$$p \propto -4 - \Upsilon - 7$$
$$p \propto 8;$$

430 Et comme par le quarantiéme numero,

$$z \propto \tfrac{1}{2}p;$$

440 La reſolution de la puiſſance propoſée eſt

$$z \propto -2 + \tfrac{1}{2}\Upsilon - 7,$$
$$z \propto -2 - \tfrac{1}{2}\Upsilon - 7,$$
$$z \propto 4.$$

450 Que cet exemple ſerve à montrer comment on doit obſerver ce qui eſt dit au ſeptiéme probleme,

bleme, touchant une équation proposée où il se trouve quelque fraction.

PROBLEME X.

Resoudre une équation cubique dont le second terme n'est pas évanoui.

1° LE prémier probleme fera évanouïr le second terme par une transformée que vous resoudrez, en observant la methode qu'il vous plaira.

PREMIER EXEMPLE.

Qu'il faille resoudre la puissance
$z^3 + 10\,zz - 12\,z + 20 \propto \theta$.
2° Supposant $z \propto p - 3\frac{1}{3}$, il vient
3° $p^3 * - 45\frac{1}{3}p + 134\frac{2}{27} \propto \theta$.
4° Soit $z' \propto 3\,p$. Il viendra la transformée.
5° $z'^3 * - 408\,z' + 3620 \propto \theta$.
6° La resolution de cette puissance fournit trois racines; la premiere 11841200554507667 1 + $\surd -$ 12642091716218048 4;
La seconde,
11841200554507667 1 — $\surd -$ 12642091716218048 4;
La troisiéme,
— 2368240110901533 42, le tout en dix milliémes de millioniémes, tant ce qui est précedé, que ce qui n'est pas précedé du signe radical.

7° Je prens le tiers de chacune de ces trois valeurs de z', à cause du quatriéme numero, pour avoir les trois valeurs de p, lesquelles étant diminuées chacune de $3\frac{1}{3}$, à cause du deuxiéme numero, les restes sont les trois valeurs cherchées de z; savoir

la premiere, 6137335181692224 + ϒ —
140467685735756oo ;
La ſeconde,
6137335181692224 — ϒ —
140467606735 ? 5609 ;
La troiſiéme
— 11227467036338444 8.

EXEMPLE SECOND.

Pour reſoudre la puiſſance
$z^3 + 6zz * — 28 ☽ 0$,
8o Soit $z ☽ z' — 2$. Il viendra
9o $z'^3 * — 12 ♃ — 12 ☽ 0$,
10° Dont les racines ſont, comme nous avons trouvé cy-devant, ſavoir la premiere — 111574940 ;
La ſeconde,
— 276873430 ;
La troiſiéme
388448370 ; en milliémes de millioniémes.
11o A cauſe du huitiéme numero, je les diminuë chacune de 2, pour avoir les trois valeurs cherchées de z ; la premiere,
— 311574940 ;
La ſeconde,
— 476873430 ;
La troiſiéme
188448370.

TROISIE'ME EXEMPLE.

Qu'il faille reſoudre la puiſſance $z — 24zz — 1208z + 18688 ☽ 0$.
12o Si nous prenons $z ☽ z' + 8$,
13o Il viendra $♃^3 * — 1400 z' + 8000 ☽ 0$

14° Commençons par la recherche de la racine principale.

15° Nous trouverons $z' \propto - 40$.

16° Comme cette racine eſt un nombre entier, retranchons-là de z', & par le reſte $z' + 40 \propto 0$ diviſons $z'^3 * - 1400\ z' + 8000 \propto 0$.

17° Le quotient

$\zeta'\ z' - 40\ z' + 200 \propto 0$ ſera une puiſſance du ſecond degré, laquelle étant reſoluë rendra.

18° $z' \propto 20 + 10 \curlyvee 2$ &

$z' \propto 20 - 10 \curlyvee 2$

19° A cauſe du douziéme numero ajoûtons 8 à chacune des valeurs trouvées de ζ'. Les trois ſommes ſeront les trois racines cherchées, ſavoir

20° $z \propto - 32$

$z \propto 28 + 10 \curlyvee 2$

$\zeta\ 28 - 10 \curlyvee 2$

21° Cet exemple fait voir que l'on abrege conſiderablement le calcul, quand on commence par la recherche de la racine principale, & que celle-ci ſe trouve faire un nombre entier.

QUATRIE'ME EXEMPLE.

Pour reſoudre l'équation

$6\ z^3 - 49\ z\zeta + 133\ z - 120 \propto 0$

22° Je diviſe le premier terme par 6, le ſecond par 1. Je multiplie le troiſiéme par 6 & le quatriéme par ſix fois ſix. J'écris $y \propto 6\ z$.

23° Il vient

$y^3 - 49\ yy + 798\ y - 4320 \propto 0$ de ſoorte que le coëfficient du premier terme eſt preſentement l'unité.

240 La resolution de cette puissance rend ces trois valeurs de y.

$$y \propto 18$$
$$y \propto 15$$
$$y \propto 16.$$

250 A cause de $v \propto 6z$, je les divise chacune par 6, ce qui fournit les trois valeurs cherchées de z, savoir

$$z \propto 3$$
$$z \propto 2\tfrac{1}{2}$$
$$z \propto 2\tfrac{2}{3}$$

260 Cet exemple nous a donné l'occasion d'employer le troisiéme numero du premier probleme, ce qui a fourni le vingt-troisiéme de celuy-ci.

270 Pour resoudre le vingt-troisiéme, la supposition de $v \propto \frac{1}{3}y' + 16\frac{2}{3}$ a rendu

280 $y'^3 * - 21y' - 20 \propto 0$.

290 De ceci l'on a tiré

$$y' \propto 5$$
$$y' \propto -4$$
$$y' \propto -1$$

300 Des vingt-septiéme & vingt-neuviéme, le vingt quatriéme a d'abord resulté; aprés quoy il n'y a eu aucune difficulté.

QUATRIE'ME DEGRE'.

PROBLEME XI.

Reſoudre une équation du quatriéme degré, dont le ſecond terme eſt évanoui.

NOus ſuivrons icy la methode de Deſcartes, & finirons la démonſtration dont Monſieur De Lagny a donné le commencement.

Cette methode plaît, à l'égard de la theorie; mais quand on veut la reduire en pratique, elle me paroît dure & rebutante. Elle ſuppoſe que le ſecond terme eſt évanoui.

Soit $x^4 - axx - bx - c \propto 0$.

On peut conſiderer cette équation, comme un produit de la multiplication de deux équations du ſecond degré,

La premiere

$xx - yx - z \propto 0$,

La ſeconde

$xx + yx + t \propto 0$.

Leur produit eſt

$$x^4 - yyxx - tyx - tz \propto 0,$$
$$- zxx - zyx$$
$$+ txx$$

& chaque terme de ce produit répond à chaque terme de la propoſée

$x^4 - axx - bx - c \propto 0$

Ainſi $- yyxx \gtrless - axx$
$- zxx$
$+ txx$
& $- tyx \gtrless - bx$,
$- zyx$
& $- tz \gtrless c$.
c'eſt-à-dire que
$- yy - z + t \gtrless - a$
$- ty - zy \gtrless - b$
$- tz \gtrless - c$, ou ſi l'on veut
1e $yy + z - t \gtrless a$
2e $ty + zy \gtrless b$
3e $tz \gtrless c$, & par conſequent $t \gtrless \frac{c}{z}$.

Mettant $\frac{c}{z}$ au lieu de t, la ſeconde équation devient

$$\frac{cy}{z} + zy \gtrless b.$$

Multipliant par z, il vient
$cy + zzy \gtrless bz$, de ſorte que
$zzy \gtrless bz - cy$
Ainſi $zz \gtrless \frac{bz - cy}{y}$

Si au lieu de t l'on écrit pareillement $\frac{c}{z}$ dans la premiere équation, il viendra

$$yy + z - \frac{c}{z} \gtrless a, \text{ ou}$$
$$z \gtrless a - yy + \frac{c}{z}$$

La multiplication par z fournit

$$zz \propto az + c$$
$$- yyz$$

Les deux valeurs trouvées de zz montrant que

$$az - yyz + c \propto \frac{bz - cy}{y}$$

Multiplions par y, il viendra

$ayz - y^3 z + cy \propto bz - cy$,

de sorte que $bz + y^3 z - ayz \propto 2cy$;

Ainsi $z \propto \frac{2cy}{b + y^3 - ay}$

Substituons cette valeur de z dans l'équation $t \propto \frac{c}{z}$, il viendra

$t \propto \frac{cy^3 + bc - acy}{2cy}$, de sorte que $t \propto \frac{y^3 - ay + b}{2y}$.

Substituons ceci dans $ty + zy \propto b$; le resultat sera $y^6 - 2ay^4 + aayy - bb \propto 0$ ce qui est une équation du troisiéme degré.
$$+ 4cyy$$

Dans l'équation $z \propto a - yy + \frac{c}{z}$ substituons la valeur de $z \propto \frac{2y}{y^3 - ay + b}$ il viendra

$z \propto \frac{3}{2}a - \frac{3}{2}yy + \frac{b}{2y}$.

La ſubſtitution de cette valeur de z dans l'équation $xx - yx - z \propto 0$ fournit $xx \propto yx - \frac{1}{2}yy + \frac{1}{2}a + \frac{b}{2y}$.

A preſent dans l'équation $xx \propto -yx + t$ ſubſtituons la valeur de $t \propto \frac{y - ay + b}{2y}$; il viendra

$$xx \propto -yx - \tfrac{1}{2}yy + \tfrac{1}{2}a + \frac{b}{2y}$$

Regle.

Soit la propoſée

$$x^4 \pm axx \pm bx \pm c \propto 0.$$

J'écris en ſa place

$$y^6 \pm 2ay^4 + aayy - bb \propto 0$$
$$\overline{+}\ 4cyy$$

Cette reduite generale ſignifie que quand il y a dans la propoſée $+ axx$, il doit y avoir dans la reduite $+ 2ay^4$; que la propoſée ayant $- axx$, la reduite doit avoir $- 2ay^4$; que la reduite a toûjours $+ aayy$, & toûjours $- bb$, & que la propoſée ayant $+ c$, il doit y avoir dans la reduite $- 4cyy$; enfin que la propoſée ayant $- c$, il faut qu'il y ait dans la reduite $+ 4cyy$; ce renverſement étant marqué par $\overline{+}$; au lieu que quand il y a conformité $\pm$.

La

La reduite qui eſt du troiſiéme degré étant reſoluë, on a la valeur de y.

L'on mettra cette valeur de y dans les deux équations qui ſuivent.

PREMIERE.

$$xx - yx + \tfrac{1}{2}yy \propto 0 \pm \tfrac{1}{2}a \pm \frac{b}{2y}$$

DEUXIE'ME.

$$\text{Et } xx + yx + \tfrac{1}{2}yy \propto 0 \pm \tfrac{1}{2}a \mp \frac{b}{2y}$$

Ces deux dernieres équations étants reſoluës, on aura les quatre valeurs de x.

Il eſt clair que l'on peut écrire, ſi l'on veut, pour propoſée

$$x^4 \propto \pm axx \pm bx \pm c$$

Pour reduite

$$y^6 \propto \pm 2ay^4 \pm aayy + bb \mp 4cyy$$

De cette façon aprés avoir la grande valeur de y, nous la ſubſtituerons dans les deux équations ſuivantes, l'une

$$xx \text{ ☌ } yx - \tfrac{1}{2}yy, \pm \tfrac{1}{2}a \pm \frac{b}{2y}$$

L'autre

$$xx \text{ ☌ } -yx - \tfrac{1}{2}yy \pm \tfrac{1}{2}a \pm \frac{b}{2y}$$

Ces deux dernieres équations étants réſolues, on aura les quatre valeurs de x.

PREMIER EXEMPLE.

C'eſt le 7e du Pere Preſtet, 2e vol. page 426.

Soit la propoſée x^4 ☌ — 70 xx + 3744 x — 27993.

J'écris y^6 ☌ — 140 y^4 + 107072 yy + 14017536.

Faiſant yy ☌ v; j'écris

v^3 ☌ — 140 vv + 107072 v + 14017536

Pour faire évanouïr le ſecond terme, je fais v ☌ m — 46 $\frac{2}{3}$.

La ſubſtitution donne m^3 ☌ 113605 $\frac{1}{3}m$ + 8604324 $\frac{4}{27}$.

Pour abolir les fractions je fais 3 m ☌ n.

Alors n^3 ☌ 1022448 n + 238074752.

Ainſi n ☌ 1112 & m ☌ 370 $\frac{2}{3}$ avec v ☌ yy ☌ 324. Au lieu de y mettons 18 dans les deux équations xx ☌ $yx - \frac{1}{2}yy$ &c; il viendra xx

$\propto 18x - 93$ & $xx \propto -18x - 301$. La reſolution de ces deux équations fournit

$x \propto 9 + \sqrt{} - 12$
$x \propto 9 - \sqrt{} - 12$
$x \propto -9 + \sqrt{} - 220$
$x \propto -9 - \sqrt{} - 220$

EXEMPLE SECOND.

C'eſt le premier du Pere Preſtet 2. vol. page 424.

Soit la propoſée $x^4 \propto 37xx + 24x - 180$. Ainſi $a \propto 37$, $b \propto 24$, & $c \propto 180$.

J'écris la reduite $y^6 \propto 74y^4 - 649yy + 576$.

Pour la reſoudre ſoit $yy \propto v$.

Ainſi au lieu de la reduite, il viendra l'équation $v^3 \propto 74vv - 649v + 576$.

Pour faire évanouïr le ſecond terme, ſoit $v \propto t + 24\frac{2}{3}$.

Par ce moyen $t^3 \propto 1176\frac{1}{3}t + 1458\frac{55}{27}$.

Pour faire évanouïr les fractions on fait $f \propto 3t$.

Par ce moyen $f^3 \propto 10587f + 393766$.

Cecy rend $f \propto 118$.

De ſorte que le tiers de f, c'eſt-a-dire $t \propto 39\frac{1}{3}$.

A cauſe de $v \propto t + 24\frac{2}{3}$ écrivons $v \propto 64$.

Nous avons ſuppoſé $v \propto yy$.

Par conſequent $yy \propto 64$, (& par extraction) $y \propto 8$

Suſtituons 8 au lieu de y dans les deux équations $xx \propto yx - \frac{1}{2}yy$ &c; nous trouverons $xx \propto 8x - 12$ & $xx \propto -8x - 15$

La reſolution de ces deux équations fournit quatre valeurs de x; la premiere $x \propto 6$, la ſeconde $x \propto 2$, la troiſiéme $x \propto -5$, la quatriéme $x \propto -3$.

TROISIE'ME EXEMPLE.

C'eſt le deuxiéme du Pere Preſtet 2e vol. page 425.

Soit la propoſée $x^4 \propto 8xx + 8x - 15$, de ſorte que $a \propto 8$ & $b \propto 8$ & $c \propto 15$.

J'écris la reduite $y^6 \propto 16y^4 - 4yy + 64$.

Et trouve la premiere valeur de $yy \propto 16$.

Cecy fournit $y \propto 4$.

Mettons 4 au lieu de y dans les deux équations $xx \propto yx - \frac{1}{2}yy$ &c : il viendra $xx \propto 4x - 3$ & $xx \propto -4x - 5$.

La reſolution de ces deux équations fournit premierement $x \propto 3$, ſecondement $x \propto 1$, troiſiémement $x \propto -2 + \sqrt{-1}$, quatriémement $x \propto -2 - \sqrt{-1}$.

QUTRIE'ME EXEMPLE.

C'eſt le troiſiéme du Pere Preſtet 2. vol. page 425.

Soit la propoſée $x^4 \propto 4xx + 8x - 35$.

J'écris la reduite $y^6 \propto 8y^4 + 124yy + 64$. & faiſant $v \propto yy$.

J'écris $v^3 \propto 8vv + 124v + 64$, & faiſant $v \propto t + 1$ pour faire évanouïr le ſecond terme de l'équation $v^3 \propto 8vv$ &c : j'écris la préparée $t^3 \propto 145\frac{1}{3}t + 432\frac{16}{27}$ & pour ôter les fractions, je fais $f \propto 3t$ & écris $f^3 \propto 1308f + 11680$. Ainſi $f \propto 40$ & $t \propto 13\frac{1}{3}$ & $t + 1$ ou $v \propto 16 \propto yy$ & par extraction $y \propto 4$. Ainſi $xx \propto 4x - 5$ & $xx \propto -4x - 7$ & par conſequent $x \propto 2 + \sqrt{-1}$ & $x \propto -2 + \sqrt{-1}$ & l'équation eſt reſoluë.

CINQUIE'ME EXEMPLE.

C'eſt le quatriéme du Pere Preſtet, 2. vol. page 425.

Soit la propoſée $x^4 \propto 7xx + 2x - 2$. J'écris ſa reduite $y^6 \propto 14y^4 - 41yy + 4$. Faiſant $v \propto yy$, je trouve $v^3 \propto 14vv\,41v - + 4$. Faiſant $v \propto t + \frac{14}{3}$ j'écris la préparée de $v^3 \propto 14vv$ &c : ſçavoir $t^3 \propto 24\frac{1}{3}t + 15\frac{35}{27}$ & pour ôter les fractions je fais $f \propto 3t$. Ainſi $f^3 \propto 219f + 430$.

Pour les deux équations, l'une $xx \propto yx - \frac{1}{2}yy, + \frac{1}{2}a + \frac{b}{2y}$

Et l'autre $xx \propto -yx - \frac{1}{2}yy + \frac{1}{2}a - \frac{b}{2y}$

Je conſidere que y valant $3\frac{14625678}{10000000}$, il doit venir

$$xx \propto 3\frac{14625678}{10000000}x - 1\frac{31165137}{10000000} \text{ \& } xx \propto -3\frac{14625678}{10000000}x - 1\frac{76732593}{10000000}.$$

Ces équations étants reſoluës, l'on trouve premiere-

ment $x \gtrless 2 \frac{73205}{100000}$ ſecondement, $x \gtrless 0 \frac{41421}{100000}$; troiſiémement $x \gtrless - 0 \frac{73205}{100000}$; quatriémement $x \gtrless - 2 \frac{41421}{100000}$

Des quatre valeurs trouvées, la premiere & la troiſiéme étants ajoûtées en une ſomme font préciſement 2, dont la moitié eſt un entier, ce qui montre que chacune eſt un binome dont le premier membre eſt l'unité. Pour avoir le ſecond membre du binome j'ôte 1 de la premiere valeur. Le reſte eſt $1 \frac{73205}{100000}$ & ſi on double le logarithme de ce reſte, on aura à tres-peu prés celuy de 3. Ainſi la premiere valeur de x eſt $1 + \surd 3$, en cas que la grandeur qui eſt ſous le ſigne ſoit commenſurable en puiſſance. Au lieu de x je ſubſtituë dans la propoſée le binome $1 + \surd 3$, & trouve que cela s'accorde à ce que demande la propoſée. Ainſi je ſuis ſeur que $x \gtrless 1 + \surd 3$. Enſuite de 1 j'ôte $\surd 3$, en écrivant $1 - \surd 3$ pour la troiſiéme valeur, & trouve par la ſubſtitution que $1 - \surd 3$ eſt juſte.

Et comme la ſeconde & la quatriéme valeur font la ſomme de 2 entiers, ſavoir -2 dont la moitié eſt -1; j'ôte -1 de la ſeconde valeur; le reſte eſt -141421, & le double de ſon logarithme, en regardant ce nombre comme abſolu, parce que le quarré d'un negatif eſt toûjours affirmatif, eſt preſque égal à celuy de 2; & ſi on écrit $x \gtrless -1 + \surd 2$ la ſubſtitution s'accor-

dera à ce que demande la propoſée, De même ſi ſi de — 1 j'ôte ϒ 2 en écrivant — 1 — ϒ 2, la ſubſtitution de cette valeur, au lieu de x dans la propoſée, ſatisfera à ce qu'il faut.

Remarquez que ſi dans l'addition il s'étoit trouvé une ou deux cent milliémes de plus ou de moins que les entiers, cela ſeroit venu de quelque erreur dans le calcul; la ſomme de deux racines (quand on les prend deux à deux comme il faut) faiſant toûjours des entiers, ſuppoſé que chaque valeur de x ſoit un binome ayant ſa premiere partie rationelle & ſa ſeconde commenſurable en puiſſance.

SIXIE'ME EXEMPLE.

C'eſt le cinquiéme du Pere Preſtet 2. vol. page 425e & 426e.

Soit la propoſée $x^6 \text{ Ø } 68\,xx + 12x - 255$. J'écris ſa reduite $y^6 \text{ Ø } 136\,y^4 - 3604\,yy + 144$ & faiſant $v \text{ Ø } yy$ j'écris, au lieu de la précedente, l'équation $v^3 \text{ Ø } 136\,vv - 3604\,v + 144$, & la préparée de celle-ci, en faiſant $v \text{ Ø } t + 45\frac{1}{3}$, ſe trouve $t^3 \text{ Ø } 2561\frac{1}{3}t + 23092\frac{25}{27}$ & pour évanouïr les fractions, faiſant $f \text{ Ø } 3t$, on écrit $f^3 \text{ Ø } 23052\,f + 623504$.

De-là on tire $f \text{ Ø } 163\frac{879952}{626650}$ à fort peu prés. Ainſi $\frac{1}{3}f \text{ Ø } t \text{ Ø } 54\frac{2}{3}$ & $t + 45\frac{1}{3} \text{ Ø } v \text{ Ø } yy \text{ Ø } 99\frac{959984}{\cdots\cdots}$ dont le logarithme eſt 1. 99982, 61780, ſa moitié 0. 99991, 30890 répond en nombres naturels à la valeur de $y \text{ Ø } 9\frac{997999001}{\cdots\cdots}$; & comme f étoit plus petite que 163

$\frac{87}{1000}\frac{952}{000}$, de même y] $9 \frac{997999001}{1000000000}$; & comme on s'eſt ſervi de logarithmes qui avoient ſeulement dix figures aprés la caracteriſtique, on ne peut pas bien s'aſſeurer de la premiere figure à droit de cette valeur de y. Ainſi nous ferons y] $9 \frac{997999}{1000000}$.

Et y^6] $999800 \frac{7}{10000}$ & un peu moins. D'un autre côté au lieu de y écrivant $9 \frac{997999}{1000000}$, on trouve $136\,y^4 \gg 1358911 \frac{783}{10000}$ à quoy ajoûtant 144, ſi de la ſomme $1359055 \frac{783}{10000}$ on ôte $3604\,yy \gg 360255 \frac{7824}{10000}$, le reſte qui exprimera la valeur de $136\,y^4 - 360\,yy + 144$ ſera $999800 \frac{2056}{10000}$ ce qui approche aſſez de la valeur trouvée de y^6. Ainſi l'équation $y^6 \gg 136\,y^4 - 3604\,yy + 144$ eſt reſoluë aſſez bien pour ne pas tromper d'une dix milliéme partie d'entier dans la comparaiſon de ſes deux membres. Et comme nous avons vû que $ſ$ a été trouvée exacte dans les neuf premiers chiffres de gauche à droit, de même l'expreſſion $y \gg 9 \frac{99799001}{1000000000}$ eſt exacte à une particule prés juſqu'au nombre $9 \frac{997999001}{1000000000}$, à cauſe de quoy, y comme on a dit $\gg 9 \frac{997999}{1000000}$.

Pour le reſte de l'operation. Nous avons y qui eſt

$\frac{997999}{1000000}$ eſt à fort peu prés 9 ; ſubſtituons cette valeur dans les deux équations planes $xx \propto yx - \frac{1}{2}yy$ &c. aprés trouvé $\frac{b}{2y} \propto o - \frac{60011008}{1000000}$ (car pour ce qui eſt de y & de yy & par conſequent $\frac{1}{2}yy$, nous l'avons déja trouvé, & a eſt connu) nous aurons pour équation premiere $xx \propto 9\frac{997999}{1000000}x - 15\frac{37987192}{1000000}$ & pour deuxiéme équation $xx \propto -9\frac{997999}{1000000}x - 16\frac{58011208}{1000000}$ & ces deux équations étants reſoluës on a les quatre valeurs de x, ſavoir

1e. . . . $x \propto 8\frac{099021}{898978}$

2e. . . . $x \propto 1$

3e. . . . $x \propto -2\frac{099021}{898978}$

4e. . . . $x \propto 2$

Dans cet exemple la premiere & la troiſiéme valeur de x font la ſomme de + 6 entiers, & pareillement la ſomme de la deuxiéme & de la quatriéme valeur fait — 6. Je prens la moitié de la ſomme de la premiere & de la troiſiéme, c'eſt-à-dire + 3 & ôte cette moitié de la premiere valeur. Le reſte eſt $5\frac{099021}{1000000}$ dont le quarré qui ſe trouve facilement par les logarithmes eſt à fort peu prés 26 Ainſi nous aurons deux valeurs de x, l'une $x \propto 3 + \sqrt{26}$ & l'autre $x \propto 3 - \sqrt{26}$.

De même la deuxiéme & la quatriéme valeur de x font enſemble — 6. La moitié de cette ſomme étant ôtée de — 7 $\frac{898978}{}$. Le reſte $\frac{898978}{}$ — 4 a pour quarré à fort peu prés 24.

Ainſi j'écris $x \propto -3 + \surd 24$ & $x \propto -3 - \surd 24$. Les quatre valeurs de x ſont donc,

1e.... $x \propto 3 + \surd 26$
2e.... $x \propto 3 - \surd 26$
3e.... $x \propto -3 + \surd 24$
4e.... $x \propto -3 - \surd 24$, & ſi on ſubſtituë chacune de ces quatre valeurs l'une aprés l'autre dans la propoſée, on reconnoîtra qu'elles ſont exactes.

SEPTIE'ME EXEMPLE.

C'eſt le ſixiéme du Pere Preſtet 2. vol. page 426.

Soit la propoſée $x^4 \propto -10xx + 145x - 96$ & que l'on ait trouvé ſa reduite $y^6 \propto -20y^4 + 284yy + 21025$. En la place de celle-ci, en faiſant $yy \propto v$; l'on écrit $v^3 \propto -20vv + 284v + 21025$; la préparée de cette derniere eſt $t^3 \propto 417\frac{1}{3}t + 18539\frac{2}{27}$. Faiſant $t \propto 31$, on écrit $f^3 \propto 3756 + 500555$. Ainſi $f \propto 95$ & $t \propto 31\frac{1}{3}$ & v ou $yy \propto 25$ & par extraction $y \propto 5$. De cette façon il vient $xx \propto 5x - 3$ & $xx \propto -5x - 32$. Par conſequent $x \propto 2\frac{1}{2} \pm \surd 3\frac{1}{4}$ & $x \propto -2\frac{1}{2} \pm \surd 25\frac{1}{4}$ & ce ſont les quatre valeurs de x & la propoſée eſt reſoluë.

FIN.

CATALOGUE

Des Livres qui ſe vendent chez CLAUDE JOMBERT, Libraire à Paris, Quay des Auguſtins, vis-à-vis la deſcente du Pont-Neuf, à l'Image Nôtre-Dame.

LEs Oeuvres d'Architecture d'Antoine le Pautre, Architecte ordinaire du Roy, contenant divers Plans & élevations d'Egliſes, Palais, Châteaux, Portes de Villes, Fontaines, &c. fol. avec 60 Planches, 15 l.

L'Art de Tourner ou de faire en perfection toutes ſortes d'Ouvrages au Tour : par le Pere Plumier Minime, vol. in folio avec 80. Planches gravées en taille douce, 15 l.

OEUVRES DE M. IRSON,
Teneur de Livres de Comptes.

Methode pour bien dreſſer toutes ſortes de Comptes à parties doubles, folio grand papier, 10 l.

Pratique generale & methodique des Changes Etrangers, la réduction des Monnoyes, des Poids & Meſures, avec un Traité des Lettres & Billets de Changes, &c. in 4. 6 l.

L'Abregé de ladite Pratique des Changes, in 12, 2 l.

L'Arithmetique pratique & raiſonnée, in 4, 6 l.

L'Abregé de ladite Arithmetique, in 12, 2 l. 5 ſ.

OEUVRES DU SIEUR BOSSE.

Maniere de Deſſigner les Ordres d'Architecture & toutes les parties qui en dépendent, folio avec 90. Planches en taille douce. 15 l.

— Traité du Trait ou coupe des pierres 8. avec 115. planches en taille douce, 5 l.

— Les Leçons de Geometrie & de Perſpective avec la maniere de la pratiquer ſur les Tableaux & ſurfaces, & le Peintre converti, 8. avec 120. Planches, 5 l.

La maniere de graver à l'eau-forte & au burin, & de faire les vernis dur & mol avec la maniere d'imprimer en

taille douce, de conſtruire la Preſſe & de faire de beau noir 8. 20 Planches, 3 l.

— Methode univerſelle pour tracer les Cadrans 8. 30 planches, 2 l. 10. ſ.

— Le Livre pour apprendre à deſſigner ſans Maître, le Portrait, la Figure & le Payïſage en 90 Planches in 4, 4 l. 10 ſ.

— Les proportions du corps humain, deſſigné d'aprés l'antique, in 16, 1 l. 15 ſ.

Oeuvres de M. Ozanam, *De l'Academie Royale des Sciences.*

Traité des Lignes du premier genre ou des Sections Coniques 4, 8 l.

— Dictionaire Mathematique, ou idée generale des Mathematiques 4, Figures, 12 l.

Cours de Mathematiques qui comprend toutes les parties de cette Science les plus utiles à un Homme de Guerre, & à tous ceux qui veulent ſe perfectionner dans les Mathematiques, diviſé en dix Traitez & relié en cinq tomes in 8, enrichi de 200 Planches en taille douce, 25 l.

Les Traitez dudit Cours ſe vendent auſſi ſéparément.

Les Elemens d'Euclide expliquez & démontrez d'une maniere courte & facile avec l'uſage de chaque propoſition, 8, 3 l. 5 ſ.

L'Arithmetique, où toutes les operations de cette ſcience ſont démontrées, 1 l. 15 ſ.

La Trigonometrie rectiligne & ſpherique, avec les Tables de Sinus, Tangentes, Secantes, & Logarithmes 8, 3 l. 15 ſ.

La Geometrie Theorique & Pratique, qui contient la Geodeſie, la Longimetrie, la Planimetrie, & la Stereometrie, 8, 3 l. 5 ſ.

La Fortification réguliere & irréguliere, qui comprend la conſtruction, l'attaque & la défenſe de toutes ſortes de Places, ſelon les plus celebres Auteurs, 8. 3 l. 15 ſ.

La Mechanique, où il eſt traité des Machines ſimples & compoſées de Lidraulique, 8. 3 l. 15 ſ.

La Perſpective theorique & pratique, où l'on enſeigne la maniere de mettre toutes ſortes d'objets en perſpective. 8. 2 l. 5 ſ.

La Geographie & Coſmographie, qui traite de la Sphere, des Corps céleſtes, des differents Syſtêmes du Monde, du Globe & de ſes uſages, 3 l.

La Gnomonique, où l'on donne, par un principe gene-

rale, la maniere de faire des Cadrans ſur toutes ſortes de ſurfaces, 8. 2 t. 15 ſ.

Recreations Mathematiques & Phyſiques, qui contiennent pluſieurs Problêmes d'Arithmetique, de Geometrie, d'Optique, de Gnomonique, de Coſmographie, de Mechanique, de Pyrotechnie & de Phyſique ; avec un Traité nouveau des Horloges élementaires, 2 vol. 8. 9 l.

L'uſage du Compas de proportion, expliqué & démontré d'une maniere courte & facile, 8. 1 l. 10 ſ.

Tables de Sinus, Tangentes & Secantes, & de Logarithmes des Sinus, Tangentes & des nombres depuis l'unité juſqu'à 10000 par Ulacq, nouvelle Edition, corrigée & augmentée par M. Ozanam, 8. 3 l.

Methode facile pour arpenter ou meſurer toutes ſortes de ſuperficies, & pour toiſer exactement la Maçonnerie, les vuidanges des Terres, & tous les autres corps, dont on peut avoir beſoin dans la pratique, in 12. 2 l.

Nouvelle Trigonometrie, où l'on trouve la maniere de calculer toutes ſortes de Triangles Rectilignes, ſans les Tables de Sinus, & auſſi par les Tables de Sinus, in 12. 1 l. 10 ſ.

Les Elemens d'Euclide, expliquez d'une maniere nouvelle & tres-facile, avec l'uſage de chaque Propoſition pour toutes les parties des Mathematiques, par le P Deſchalles, nouvelle Edition, corrigée de plus de 200 fautes, & augmentée par M. Ozanam, enrichie de Planches en taille douce, in 12. 2 l. 10. ſ.

La Geometrie pratique, contenant la Trigonometrie theorique & prarique, la Longimetrie, la Planimetrie & la Stercometrie, in 12. 1 l. 15 ſ.

— Methode generale pour tracer les Cadrans ſur toutes ſortes de Plans, in 12 Fig. 1 l. 10 ſ.

— Uſage de l'Inſtrument univerſel pour reſoudre promptement & tres-exactement tous les Problêmes de Geometrie pratique ſans aucuns calculs, in 12. Fig. 1 l. 5 ſ.

— Methode pour lever les Plans & les Cartes de terre & de mer, in 12. Figures, 1 l. 10 ſ.

— Le Toiſé & le Tarif generale des bois, in 12. 3 l.

Nouveaux Elemens de Geometrie par M. Arnauld, 4. 6 l.

Traité d'Algebre ou Principes Generaux pour réſoudre les Queſtions de Mathematique avec les Remarques touchant le Problême des Tangentes par Mr Rolle de l'Academie des Sciences, 4, 6. l.

— Ledit Problême des Tangentes ſéparément broché, 2. l.
— Méthode pour la Meſure des Surfaces, ou Inſtruction au Calcul Integral par M. Carré de l'Academie des Sciences, 4, 4. l. 10. ſ.
— Application de l'Algebre à la Geometrie avec une introduction pour les infinemens petits par M. Guinée de l'Academie, 4, 6 l.
— Eſſai d'Analyſe ſur les Jeux d'hazar 4. figures, 6 l.
— Des Communes Meſures & Racines Commune, & le reſte, 8, 3. l.
La Theorie de la Maneuvre des Vaiſſeaux par M. le Chevalier Renauld, 8, 26. planches en taille douce, 3. l.
— La Gnomonique univerſelle ou la Science de tracer les Cadrans ſolaires ſur toutes ſortes de ſurfaces par M. Richer, 8, 54. planches, 3. l. 10. ſ.
— Les quinze Livres des Elemens d'Euclyde par Henrion, 8, 2. volumes, 4. l. 10. ſ.
— Calculs d'Uſage pour trouver promptement les poids & meſures ſuivant leur prix, &c., 8, 2. l. 10. ſ.
— Nouveaux Elemens d'Arithmetique & d'Algebre, ou introduction aux Mathematiques par M. de Lagny, in 12, 2. l. 10. ſ.
— Pratique de la Geometrie ſur le papier & ſur le terrain, avec 60. planches gravées en taille douce, par Sebaſtien le Clerc, in 12, 3. l.
— Traité de l'Equilibre des Liqueurs & de la peſanteur de la Maſſe de l'air, par M. Paſchal, in 12. Figures, 1. l. 10. ſ.
— Nouvelles Conjectures ſur la peſanter, par M. Varignon de l'Academie, in 12, figures, 2 l. 10 ſ.
— Remarques & Experiences Phyſiques, ſur la conſtruction d'une nouvelle Clepſidre, ſur les Baromettres, Thermometres & Gygrometres, par M. Amontrons de l'Academie, in 12, figures, 1 l. 10 ſ.
— Les Gydrauliques, ou traité du mouvement des eaux & des autres Corps fluides, par M. Mariotte de l'Academie, in 12, 2 l. 10 ſ.
— Traité du Nivellement, contenant la Theorie & la Pratique de cet Art, avec la deſcription d'un Niveau nouvellement inventé, par M. Bulet, avec de très-belles planches gravées par Perelle, in 12, 1 l. 10 ſ.
— Le Mercure Geographique, pour gnider les curieux dans la connoiſſance des Cartes Geographiques, in 12, 1 l 10 ſ.
— Les vrayes Centuries & Prophetie⁊ de Maître Michel No-

ſtradamus, avec des Obſervations, in 12, 1 l. 10 ſ.
—— L'Art de la Verrerie, où l'on apprend à faire le Verre, le Criſtal, l'Email, la Porcelaine, & la maniere de peindre ſur le Verre, & en Email, & de faire les Miroirs, in 12, figures, 3 l.
—— Secrets & remedes éprouvez, dont les préparations ont été faite au Louvre de l'ordre du Roi, par M. l'Abbé Rouſſeau ci-devant Capucin & Medecin du Roi, in 12, 2 l. 10 ſ.
—— Traité de la Goutte, ou l'art de connoître les vrais principes de cette maladie, avec pluſieurs remedes, par M Aignan, in 12, 1 l. 10 ſ.
—— Tableau des maladies où l'on découvre leurs ſignes & leurs évenemens, traduit du Latin de Commices avec des Remarques, in 12, 2 l. 10 ſ.
—— Principes de Phyſique, rapportés à la Medecine. Pratique, ſuite ou Traité des métaux & des mineraux, & des Remedes qu'on en peut tirer, avec des Diſſertations, ſur le Sel & le Soulphre des Philoſophes, ſur la Goutte, la Gravelle, la petite Verole, la Rougeole & autres, avec des Remedes choiſis, par M. Chambon, in 12, 2 volumes, 5 l.
—— Reflexions ſur les Regles & ſur l'Uſage de la Critique, touchant l'Hiſtoire de l'Egliſe. les Ouvrages des Peres, les Actes des anciens Martyrs, les Vies des Saints, & ſur la Methode que M. Simon a donnée pour faire une Verſion de la Bible plus exacte que tout ce qui a paru juſqu'à preſent, avec des Notes Hiſtoriques, Chronologiques & Critiques, 4, 8 l.
—— *Numiſmata ærea Imperatorum, Auguſtorum, & Cæſarum in coloniis, authore Joan foy Vaillant, fol. 2 Volumes,* 30 l.
—— *Numiſmata Imperatorum Romanorum, præſtantiora à Julio Cæſare, ad poſtumum & Tyrannos, 4, 2 vol.* 12 l.
—— *Selecta Numiſmata, antiqua; ex muſeo Petri Seguini, Editio altera, 4,* 6 l.
—— *Hiſtoria Geſtorum in Eccleſia memorabilium, 12,* 1 l. 10 ſ.
—— *Magiſtris Scholarum inferioreinteriorum, de Ratione, diſcendi & docendi authore Joſepho Juventio, S. Jeſus, 12,* 1 l. 10 ſ.
—— *Inſtitutionum Canonicarum libri quatuor opus ad præſentem Eccleſiæ Gallicanæ uſum accomodatum ſtudio ac curâ, Petri Hallai Anteceſſoris Pariſienſis &c. in 12,* 2 l.
—— *Breviſſima Juris Civilis inſtitutiones præcipi illius definitionibus ac diviſionibus contexta, authore D. Deloy,* 1 l. 10 ſ.
—— *Breviſſima Juris Canonici inſtitutiones præcipuis illius definitionibus ac diviſionibus contexta 12,* 1 l. 10 ſ.
—— Nouvelles Inſtitutions Coûtumieres qui contiennent les Regles de tout le Droit Coûtumier, fondées ſur toutes les Diſpoſitions

de toutes les Coûtumes de France, & ſur l'Uſage établi par les Arreſts, & par M. de Ferriere : in 12, 3 volumes, 7 l.

Recüeil d'Emblêmes, Deviſes, Médailles & Chifres ſimples, doubles, triples, & fleuronnez, pour tous les noms imaginables, avec les tenans, ſupports & cimiers ſervans aux ornemens des armes, nouvelle édition augmentée, volume 8, enrichi de 350 planches, 6 l.

Diſcours Hiſtorique de l'Election des Empereurs, & de l'origine des Electeurs, avec la Bulle d'Or & la Capitulation de Joſeph, Empereur dernier mort, vol. 8, 2 l.

Traité de l'Eſprit de l'Homme, in 12, 2 l. 10 ſ.

Recherches Hiſtoriques & Genealogiques de l'Ordre du ſaint Eſprit, contenans les Noms, Qualitez, Armes & Blazons de tous les Chevaliers & Officiers de l'Ordre, depuis ſon inſtitution juſqu'à preſent, enſemble ceux de l'Ordre de S. Michel, 2 vol. in 12, 4 l.

Office des Chevaliers de l'Ordre du S. Eſprit, in 16.

Apologerique de Tertulien traduit par M. Gery de l'Academie Françoiſe, avec le Latin à côté, in 12, 1 l. 15 ſ.

La Vie de la Sainte Vierge, ou conſideration ſur ſes Fêtes & autres Myſteres de ſa Vie, par le Sieur de Grandval in 12, 1 l.

La Lumiere du Chrétien ou le Cathéchiſme de Nantes, in 12, 2 l.

Ceremonial d'adminiſtrer les Sacremens aux malades, avec l'Office des Morts noté, in 12, 1 l. 10 ſ.

Hiſtoire des Combats d'Almenar & de Penalva, in 12, broché, 12 ſ.

Amarante, ou le Triomphe de l'Amitié, en Proſes & en Vers, par Madame D***** in 12, 1 l. 10 ſ.

Les Caracteres du vrai & du faux Amour, l'honnête Homme & l'Homme de Lettre Amoureux, ſous preſſe.

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

Digitized by Google